Vorlesungen 5 und 6

Roderich Tumulka

November 24, 2005

5 Quadratische Gleichungen, Trigonometrie

Quadratische Gleichungen in einer Variablen sind von der Form

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

mit $\alpha \neq 0$ (sonst ist es eine *lineare Gleichung*) und besitzen die Lösungen

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha}}$$

Da sich diese Formel nur Leute merken können, die sie ständig anwenden, merken sich alle anderen lieber die folgende Methode zum Lösen: die *Methode der quadratischen Ergänzung.*

Dazu dividieren wir zunächst durch α; das geht, weil $\alpha \neq 0$ vorausgesetzt war. Also

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0\,.$$

Nun beachten wir, dass $x^2 + 2px + p^2$ ein Quadrat ist und wir daher $x^2 + 2px$ als ein Quadrat plus eine Konstante schreiben können, $(x+p)^2 - p^2$ (daher "quadratische Ergänzung"). Dementsprechend

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

oder

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha}\,,$$

was von der Form $y^2 = c$ ist mit den Lösungen $y = \pm\sqrt{c}$ für $c \geq 0$ und ohne Lösungen für $c < 0$. Aus $y = x + \beta/2\alpha$ lässt sich nun leicht das x gewinnen.

Die gängigen Einheiten zur Winkelmessung sind das Gradmaß und das Bogenmaß ($\varphi = \ell/r$, $\ell =$ Länge des Kreisbogens mit Radius r zum Öffnungswinkel φ).

Gradmaß	Bogenmaß
360°	2π
180°	π
90°	$\pi/2$
$57^\circ\, 17'\, 45''$	1
45°	$\pi/4$
30°	$\pi/6$

Allgemein $g = (360^\circ/2\pi)b$ oder $b = (2\pi/360^\circ)g$. $(1/60)^\circ = 1' = 1$ Minute $= 1$ Bogenminute, $(1/60)' = 1'' = 1$ Sekunde $= 1$ Bogensekunde.

Definition Winkelfunktionen:

$$\sin = \text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos = \text{Cosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\tan = \text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\left(\cot = \text{Cotangens} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}\right)$$

$$\left(\sec = \text{Secans} = \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Ankathete}}\right)$$

$$\left(\csc = \text{Cosecans} = \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Gegenkathete}}\right)$$

Beispiel: Die Steigung einer schiefen Ebene ist der Tangens des Neigungswinkels.

Geometrische Deutung als Streckenlängen mit Vorzeichen am Einheitskreis. $\tan = \sin / \cos$. Graphen von $\sin, \cos, \tan$.

Satz von Pythagoras: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

Bemerkung: Periodizität: $f(x+2\pi) = f(x)$ für $f = \sin, \cos, \tan$. Auch $f(x+2\pi n) = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Bei Schwingungsphänomenen (Oszillationen, z.B., Vibration, Schall, Licht) oder Rotationsbewegung ist eine Größe $S(t)$ eine periodische Funktion der Zeit $S(t+T) = S(t)$, $T =$ Periodenlänge; $1/T =$ Frequenz (Häufigkeit) $=$ Anzahl Schwingungen pro Zeit $= \nu = f$. *Harmonische Oszillationen* sind Funktionen der Form $S(t) = c\,\sin(\omega t + \alpha) = c\,\cos(\omega t + \beta)$. Periodisch mit Periodenlänge $T = 2\pi/\omega$, denn $S(t+T) = c\,\sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \alpha) = c\,\sin(\omega t + \alpha + 2\pi) = c\,\sin(\omega t + \alpha) = S(t)$. $c =$ Amplitude, $\alpha =$ Phasenverschiebung, $\omega =$ Kreisfrequenz $= 2\pi\nu$.

Additionstheorem (ohne Beweis):

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Anwendungsbeispiel: Bestimmung der Höhe eines Baumes $h = h_1 + s \tan \alpha$ aus der Messung von h_1, s und α.

Umkehrfunktion: Da sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng wächst, besitzt es dort eine Umkehrfunktion, genannt Arcus sinus ($\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, lat. der Bogen des Sinus). Graph. Entsprechend besitzt cos auf $[0, \pi]$ die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ und tan auf $(-\pi/2, \pi/2)$ die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$.

Bsp Sonnenhöhe: s = Länge eines senkrechten Stabes, b = Länge seines Schattens, Sonnenhöhe $\varphi = \arctan(s/b)$.

6 Vektoren und Matrizen, Teil 1

Definition. Der *Betrag* oder die *Norm* eines Vektors $u = (u_1, \ldots, u_n)$ ist

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

(Das stimmt überein mit dem Abstand des Punktes mit den Koordinaten u vom Ursprung.)

Definition. Die *Summe* zweier Vektoren $u = (u_1, \ldots, u_n)$ und $v = (v_1, \ldots, v_n)$ im $\mathbb{R}^n$ ist *komponentenweise* erklärt, $(u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$.

Bemerkung. Die geometrische Bedeutung der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ entspricht der *Parallelogrammaddition*: Man zeichne Pfeile (gerichtete Strecken), die die Punkte u und v jeweils mit dem Ursprung verbinden, verschiebe einen so parallel, dass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt des anderen zusammen fällt; dann ist sein Endpunkt $u + v$.

Beispiele: (a) Geschwindigkeiten addieren sich vektoriell. Fliegt ein Flugzeug mit Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^2$ (in fester Höhe) relativ zur umgebenden Luft, während sich die Luft mit Geschwindigkeit $u \in \mathbb{R}^2$ relativ zum Grund bewegt, so bewegt sich das Flugzeug mit Geschwindigkeit $u + v$ über Grund. Ebenso: Ruderer auf einem Fluss, Billardspiel in einem fahrenden Schiff oder Zug, Mondbahn relativ zur Erde oder relativ zur Sonne.

(b) Translationen addieren sich vektoriell. Ein Flugzeug fliegt zuerst 10 Kilometer nach Norden, dann 10 Kilometer nach Westen, so hat es insgesamt $10\sqrt{2} \approx 14{,}1$

Kilometer nach Nordwesten zurückgelegt. Aber: der Energieverbrauch entspricht 20 Kilometern (nicht vektoriell!).

(c) Mittelung von Richtungen: Sie bestimmen die Himmelsrichtung, repräsentiert durch einen Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = 1$, in die ein Zugvogel morgens losfliegt, in zahlreichen Fällen, erhalten so eine statistische Verteilung über alle Richtungen, und möchten nun den Mittelwert bilden. Sie denken zuerst daran, die Richtung durch einen Winkel auszudrücken und diesen zu mitteln, stellen aber fest, dass das Ergebnis unsinnig sein kann, wenn Sie aus einigen Winkeln nahe 360° und einigen Winkeln nahe 0° einen Mittelwert nahe 180° bilden. Eine geeignete Methode ist hingegen, die Richtungsvektoren u mit $\|u\| = 1$ im Sinne der Vektoraddition zu mitteln,

$$\overline{u} = \frac{1}{N}(u(1) + \ldots + u(N))$$

und die Richtung von $\overline{u}$ als mittlere Richtung zu betrachten.

(d) Addition von Kräften: In einem System elektrisch geladener Teilchen (z.B. Elektronen, Ionen, Staubkörner), die von 1 bis N nummeriert sind, wirkt auf Teilchen Nr. i eine Kraft

$$K_i = \sum_{j=1}^{N} K_{ij},$$

wobei die Summe eine Vektorsumme ist und K_{ij} die von Teilchen Nr. j auf Teilchen Nr. i ausgeübte Kraft (elektrostatische Anziehungs- oder Abstoßungskraft), die nach dem *Coulombschen Gesetz* in Richtung der Verbindungslinie zwischen den Teilchen i und j zeigt und Betrag

$$\|K_{ij}\| = \frac{q_i q_j}{d(x_i, x_j)^2}$$

hat, mit $q_i \in \mathbb{R}$ die Ladung und $x_i \in \mathbb{R}^3$ die Position von Teilchen i. (Notation: $K_{ij} = K_{i,j}$.)

Rechenregeln: $u + v = v + u$ (Kommutativität), $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assoziativität), $u + 0 = u$ für $0 = (0, \ldots, 0)$ (Existenz eines neutralen Elements, "Nullvektor"), $u + (-u) = 0$ für $-(u_1, \ldots, u_n) = (-u_1, \ldots, -u_n)$ (Existenz von additiv-inversen Elementen, "das Negative von u").

Bsp. Das Negative $-u$ eines Geschwindigkeitsvektors entspricht der Bewegung in die entgegengesetzte Richtung mit derselben Geschwindigkeit. Eine Punktspiegelung am Ursprung bildet jeden Vektor auf sein Negatives ab.

Definition. Das α-fache eines Vektors $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert als der Vektor $\alpha u = (\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n)$. Die dadurch definierte Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Skalarmultiplikation*.

Bsp. (a) Eine zentrische Streckung um den Faktor $\alpha > 0$ bildet jeden Punkt auf sein α-faches ab. (b) Kraft = (Masse) (Beschleunigung). (c) Die Vektoren $u \neq 0$ und αu

zeigen für $\alpha > 0$ in dieselbe Richtung. Wenn u und v in dieselbe Richtung zeigen, dann $v = \alpha u$ für geeignetes $\alpha > 0$. (d) Die Richtung des Vektors $u \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq 0$ lässt sich repräsentieren durch den Einheitsvektor e, der dieselbe Richtung wie u aber Betrag 1 hat; er ist gegeben durch $e = \|u\|^{-1}u$.

Rechenregeln: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (linke Distributivität), $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (rechte Distributivität), $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$, $1u = u$, $(-1)u = -u$, $0u = 0$. Beachte: Man multipliziert hier einen Vektor mit einem Skalar, nicht mit einem anderen Vektor! Man kann durch einen Skalar $\alpha \neq 0$ dividieren (indem man mit α^{-1} multipliziert), aber *man kann nicht durch einen Vektor dividieren!*

Definition. Eine $n \times m$-*Matrix* $A = (a_{ij})$ ist ein Rechteck-Schema aus Zahlen a_{ij} in n Zeilen und m Spalten, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Die Menge aller $n \times m$-Matrizen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(n, m)$. Das *Produkt* AB einer $n \times m$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit einer $m \times \ell$-Matrix $B = (b_{rs})$ ist die $n \times \ell$-Matrix $C = (c_{is})$ mit den Einträgen (Komponenten)

$$c_{is} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{js}.$$

Die *Summe* $A + B$ zweier $n \times m$-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ ist die $n \times m$-Matrix mit den Einträgen $a_{ij} + b_{ij}$.