Vorlesung 7

Roderich Tumulka

December 1, 2005

7 Vektoren und Matrizen, Teil 2

Definition. Die *Transponierte* A^T einer $n \times m$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist die $m \times n$-Matrix mit den Einträgen a_{ji}. A heißt *symmetrisch*, wenn $A^T = A$.

Bemerkung. Vektoren lassen sich als Matrizen auffassen; man muss sich nur festlegen, ob sie Spaltenvektoren (und damit $n \times 1$-Matrizen) oder Zeilenvektoren (und damit $1 \times n$-Matrizen) sind. Sei $A \in \mathcal{M}(n, m)$ und $x \in \mathbb{R}^m$, aufgefasst als Spaltenvektor $x \in \mathcal{M}(m, 1)$. Dann ist $Ax \in \mathcal{M}(n, 1)$ ein Spaltenvektor, für den wir einfach schreiben $Ax \in \mathbb{R}^n$, genannt "A angewandt auf den Vektor x".

Anwendung: Bei einem *Markoff-Prozess in diskreter Zeit* hat jedes Individuum einer Gesamtheit eine bestimmte Wahrscheinlichkeit w_{ij}, im nächsten Schritt in den Zustand Nummer i überzugehen, wenn es sich gerade im Zustand Nummer j befindet. Wenn es n mögliche Zustände gibt, bilden die Zahlen $w_{ij} \in [0, 1]$ eine $n \times n$-Matrix, genannt Übergangsmatrix W des Markoff-Prozesses. Befinden sich zu einem Zeitpunkt N_1 Individuen im Zustand 1, ..., N_n Individuen im Zustand n, zusammengefasst im Vektor $N = (N_1, \dots, N_n)$ (Populationsvektor oder Besetzungszahlvektor), so befinden sich im nächsten Schritt im Mittel (und, falls $N_1, \dots, N_n$ groß genug sind, näherungsweise) $N_1^{(1)} = w_{11}N_1 + w_{12}N_2 + \dots w_{1n}N_n$ Individuen im Zustand 1, allgemein $N_i^{(1)} = w_{i1}N_1 + w_{i2}N_2 + \dots w_{in}N_n$ Individuen im Zustand i. In anderen Worten, mit den Abkürzungen $N^{(t)} = (N_1^{(t)}, N_2^{(t)}, \dots, N_n^{(t)})$ und $N^{(0)} = N$,

$$N^{(t+1)} = WN^{(t)}.$$

Beispiel: Tübingen hat 83.000 Einwohner, Reutlingen 112.000. Wenn jedes Jahr 5% der Einwohner Tübingens nach Reutlingen umzögen und 10% der Einwohner Reutlingens nach Tübingen, aber niemand an irgend einen (oder von einem) anderen Ort, und niemand stürbe oder geboren würde, so erhielte man für das nächste Jahr:

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 83.000 \\ 112.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90.050 \\ 104.950 \end{pmatrix}.$$

Gelten im folgenden Jahr noch dieselben Übergangswahrscheinlichkeiten, so ergibt sich:

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90.050 \\ 104.950 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96.042,5 \\ 98.957,5 \end{pmatrix}.$$

Eine *Gleichgewichtslage oder stationäre Verteilung* wäre dann erreicht, wenn $WN = N$, d.h. wenn jedes Jahr gleich viele von T nach R wie von R nach T umziehen, also $0,05\,N_1 = 0,1\,N_2 \Rightarrow N_1 = 2N_2$. Da stets $N_1 + N_2 = 195.000$, ergibt sich daraus die Gleichgewichtslage $N_1 = 130.000$ und $N_2 = 65.000$.

Beispiel: Wachstumsmodell eines Gletschers. Das Volumen $V^{(t)}$ eines Gletschers ändert sich von Jahr zu Jahr in zufälliger Weise durch Niederschlag $S(t)$ und Abschmelzen $A(t)$, $V^{(t+1)} = V^{(t)} + S(t) - A(t)$. Wir nehmen vereinfachend an, dass die zufällige Niederschlagsmenge $S(t)$ jedes Jahr unabhängig vom Vorjahr einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung p gehorcht, d.h. $S(t) = k$ mit Wahrscheinlichkeit $p_k \in [0,1]$ für $k \in \{0,1,\ldots,K\}$, wobei $p_0+p_1+\ldots+p_K = 1$; weiter, dass $A(t)$ nur von der Größe des Gletschers abhängt, $A(t) = f(V^{(t)})$; weiter, dass V, A, S in einer geeigneten Maßeinheit nur ganzzahlige Werte annehmen; und schließlich, dass V den Wert $V_{\max}$ nicht überschreiten kann, $V \leq V_{\max}$. Dann beträgt die Übergangswahrscheinlichkeit von $V^{(t)} = j$ nach $V^{(t+1)} = i$ gerade $w_{ij} = p_k$, wobei $i = j + k - f(j)$, also $k = i - j + f(j)$. Die Komponenten des Vektors $N = (N_0, \ldots, N_{V_{\max}})$ bedeuten jetzt nicht die Anzahl der Gletscher mit bestimmter Größe, sondern die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Größe, $N_m = \text{Wkeit}(V = m)$. Da wir die jetzige Größe $V^{(0)}$ kennen, ist $N^{(0)} = (0,0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ mit $N^{(0)}_{V^{(0)}} = 1$. Gemäß $N^{(t+1)} = WN^{(t)}$ errechnet sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zufälligen Größe $V^{(t)}$ zu einer späteren Zeit, $N^{(t)}_m = \text{Wkeit}(V^{(t)} = m)$.

Anwendung: Eine Verallgemeinerung des Markoff-Prozesses ist das Leslie-Populationsmodell: Jedes Individuum einer Gesamtheit befindet sich zu einem Zeitpunkt in einem von n Zuständen. Ein Individuum im Zustand j erzeugt im Mittel ℓ_{ij} Individuen im nächsten Schritt im Zustand i; diese Werte bilden die Leslie-Matrix $L = (\ell_{ij}) \in \mathcal{M}(n,n)$. Ist $N^{(t)} = (N^{(t)}_1, \ldots, N^{(t)}_n)$ wieder der Populationsvektor zur Zeit t, dann ist im Mittel (und für große Besetzungszahlen näherungsweise)

$$N^{(t+1)} = LN^{(t)}.$$

Beispiel: Gesamtheit = Population, Zustand i = Alter in Jahren $\in \{0,\ldots,k\}$. Ein Individuum von j Jahren setzt im Mittel $\nu_j = \ell_{0j}$ Nachkommen (vom Alter 0) in die Welt und geht außerdem selbst in den Zustand $i+1$ über, wenn es nicht stirbt. Ein Individuum von j Jahren überlebt noch mindestens ein Jahr mit Wahrscheinlichkeit

$s_j \in [0,1], s_k = 0$. Also

$$N_0^{(t+1)} = \sum_{j=0}^{k} \nu_j N_j^{(t)}$$

und

$$N_i^{(t+1)} = s_{i-1} N_{i-1}^{(t)} \quad \text{für } 1 \le i \le k.$$

Dem entspricht

$$L = \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_k \\ s_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & s_{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung: Die Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung um den Winkel φ (gegen den Uhrzeigersinn) entspricht in Koordinaten der Anwendung der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(Beweis später)

Rechenregeln Addition: Seien $A, B, C \in \mathcal{M}(n,m)$. Dann gilt $A + B = B + A$ (Kommutativität), $(A+B)+C = A+(B+C)$ (Assoziativität), $A + 0 = A$ mit der "Nullmatrix" 0, die als Einträge lauter Nullen hat (Existenz eines neutralen Elementes), $A + (-A) = 0$ mit $-A = (-a_{ij})$ (Existenz von additiv-inversen [negativen] Elementen).

Rechenregeln Multiplikation: Seien $A \in \mathcal{M}(n,m), B \in \mathcal{M}(m,\ell)$ und $C \in \mathcal{M}(\ell,k)$. Kommutativität gilt nicht immer (Beispiel Übungsaufgabe), wohl aber $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativität) (ohne Beweis), $A0 = 0 = 0A$. $AI = A = IA$ mit der *Einheitsmatrix*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix},$$

die Einsen auf der *Hauptdiagonalen* trägt und sonst nur Nullen ($I =$ neutrales Element der Multiplikation). Die Einträge der Einheitsmatrix werden oft abgekürzt mit dem *Kronecker-Symbol* δ_{ij},

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Also $I = (\delta_{ij})$. Beweis für $AI = A$: Wenn $C = AI$, dann

$$c_{is} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{js} = a_{i1}0 + \ldots + a_{i,s-1}0 + a_{is}1 + a_{i,s+1}0 + \ldots + a_{in}0 = a_{is}.$$

Beweis für $IA = A$: Wenn $C = IA$, dann

$$c_{is} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}a_{js} = 0a_{1s} + \ldots + 0a_{i-1,s} + 1a_{is} + 0a_{i+1,s} + \ldots + 0a_{ns} = a_{is}.$$

Für manche, aber nicht für alle $A \in \mathcal{M}(n,n)$ mit $A \neq 0$ existiert eine *inverse Matrix* A^{-1} mit der Eigenschaft $A^{-1}A = I = AA^{-1}$; solche A heißen *invertierbar*. Ist A invertierbar, dann ist die Inverse eindeutig, d.h., wenn $B, C \in \mathcal{M}(n,n)$ mit $BA = I = AB$ und $CA = I = AC$, dann $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Ein Beispiel für eine nicht-invertierbare Matrix $A \neq 0$ ist die Matrix aus der Übungsaufgabe mit $A^2 = 0$: sie kann nicht invertierbar sein, dann andernfalls wäre $A^{-1}(A^2) = A^{-1}0 \Rightarrow (A^{-1}A)A = 0 \Rightarrow IA = 0 \Rightarrow A = 0$, was nicht stimmt.

Rechenregeln Addition und Multiplikation: $(A+B)C = AC + BC$ (linke Distributivität) für $A, B \in \mathcal{M}(n,m)$ und $C \in \mathcal{M}(m,\ell)$, $A(B+C) = AB + AC$ (rechte Distributivität) für $A \in \mathcal{M}(n,m)$ und $B, C \in \mathcal{M}(m,\ell)$. $A(-B) = (-A)B = -(AB)$.

Anwendung der Assoziativität: Aus

$$N^{(t+1)} = LN^{(t)}$$

für Markoff-Prozesse und Leslie-Modelle folgt

$$N^{(t)} = L(L(L(\cdots(LN^{(0)})\cdots))) = (\cdots((LL)L)\cdots)L)N^{(0)} = L^t N^{(0)},$$

wobei die Potenzierung von Matrizen $L^t = LLL\cdots L$ (mit t Faktoren) nur für $L \in \mathcal{M}(n,n)$ und im allgemeinen nur für Exponenten $t \in \mathbb{N}$ definiert ist, bei invertierbaren Matrizen auch für $t \in \mathbb{Z}$. Potenzrechenregeln: $A^n A^m = A^{n+m}$, $A^1 = A$, $(A^n)^m = A^{nm}$, aber im allgemeinen $(AB)^n \neq A^n B^n$, denn z.B. $(AB)^2 = ABAB \neq AABB = A^2B^2$.