8 Lineare Gleichungssysteme

Definition. Ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) ist ein System von n Gleichungen der Form

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_m$ und bekannten Koeffizienten a_{ij} und b_i. Äquivalent kann man schreiben $Ax = b$, wobei $x \in \mathbb{R}^m$ gesucht ist und $A \in \mathcal{M}(n, m)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Das Gleichungssystem heißt *homogen*, falls $b = 0$, sonst *inhomogen*. Die *Lösungsmenge* ist

$$L_b = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = b\}.$$

Beispiel: Tomographie: Transmissionskoeffizienten

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix}$$

Schattenbild ergibt Gesamttransmission $\lambda_1 = \alpha_{11}\alpha_{12}$, $\lambda_2 = \alpha_{21}\alpha_{22}$, $\mu_1 = \alpha_{11}\alpha_{21}$, $\mu_2 = \alpha_{12}\alpha_{22}$. Logarithmieren, $\log \lambda_1 = \log \alpha_{11} + \log \alpha_{12}$ etc., führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log \alpha_{11} \\ \log \alpha_{12} \\ \log \alpha_{21} \\ \log \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log \lambda_1 \\ \log \lambda_2 \\ \log \mu_1 \\ \log \mu_2 \end{pmatrix}$$

"Eliminationsverfahren" zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Wir fügen die Daten A und b zur einer $n \times (m+1)$-Matrix $B = (A|b)$ zusammen. Das Verfahren bedient sich folgender Grundschritte, die B auf eine solche Weise verändern, dass die Lösungsmenge L_b dieselbe bleibt:

1. Vertauschen zweier Zeilen von B. Dies entspricht denselben Gleichungen in anderer Reihenfolge.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Vervielfachung einer Zeile von B mit Faktor $\alpha \neq 0$.
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Addition des α-fachen einer Zeile von B zu einer anderen: (Bsp $\alpha = -2$)

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_1 - 2\mu_1 & \lambda_2 - 2\mu_2 & \lambda_3 - 2\mu_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

Wir prüfen, dass Schritt 3 nichts an der Lösungsmenge ändert: wenn, für $i \neq k$, $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$ und $\sum_j a_{kj}x_j = b_k$, dann auch $\sum_j (a_{ij} + \alpha a_{kj})x_j = b_i + \alpha b_k$. Umgekehrt, wenn $\sum_j a_{kj}x_j = b_k$ und $\sum_j (a_{ij} + \alpha a_{kj})x_j = b_i + \alpha b_k$, dann auch $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$.

Anwendung der Grundschritte am Beispiel des LGS

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 16 \tag{1}$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 14 \tag{2}$$
$$-5x_1 - 5x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 - \tfrac{11}{3}x_4 = -\tfrac{23}{3} \tag{3}$$

1. Wir stellen das LGS schematisch dar:

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}$$

2. Normierung der Kopfzeile. Um zu erreichen, dass der linke obere Eintrag 1 wird, multiplizieren wir die erste Zeile mit $1/a_{11}$.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}$$

   Sollte $a_{11} = 0$ sein, so vertauschen wir die erste Zeile mit einer Zeile, bei der der erste Eintrag nicht 0 ist. Sollten in der ersten Spalte alle Einträge 0 sein, so kommt die Variable x_1 im LGS nicht vor, kann alle reellen Werte annehmen, und braucht daher nicht mehr mitgeführt werden.

3. Elimination von x_1 aus allen Gleichungen bis auf die erste. Wir addieren das (-2)-fache der ersten Zeile zur zweiten und ihr 5-faches zur dritten.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}$$

4. Restschema. Die erste Gleichung (die Bedeutung der ersten Zeile) lässt sich jetzt nach x_1 auflösen, und sonst kommt x_1 nicht mehr vor. Wir betrachten nur noch die zweite und dritte Gleichung und die Variablen x_2, x_3, x_4. Neues Schema = Teilschema (1. Zeile und Spalte weggelassen):

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}$$

5. Das Verfahren beginnt von vorn mit dem Teilschema: Normierung der Kopfzeile etc. Weil hier die erste Spalte 0 ist, kommt die Variable x_2 nicht mehr vor, und wir betrachten das Teilschema

$$\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}$$

6. Normierung der Kopfzeile.

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}$$

7. Elimination von x_4. Subtraktion des $\frac{37}{12}$-fachen der Kopfzeile von der zweiten ergibt

$$\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & -0 & 0 \end{array}$$

8. Zusammensetzen der Ergebnisse.

$$\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Allgemein: *Zeilenstufenform* ($*$ heißt "kann $\neq 0$ sein")

$$\begin{array}{cccccccc|c} 0\cdots 0 & 1 & *\cdots & * & * & * & * & * & * \\ & & & 1 & *\cdots & * & * & * & * \\ & & & & & 1 & *\cdots & * & * \\ & & & & & & & 0\cdots 0 & * \\ & & & & & & & 0\cdots 0 & * \\ & & & & & & & 0\cdots 0 & * \end{array}$$

Diesem Schema entsprechen die umgeformten Gleichungen

$$x_1 + x_2 + \tfrac{3}{4}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 = 4 \tag{4}$$

$$x_3 - 2x_4 = 4. \tag{5}$$

9. Auflösen nach x_1 und x_3:

$$x_1 = -x_2 - \tfrac{3}{4}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 + 4 \tag{6}$$
$$x_3 = 2x_4 + 4 \tag{7}$$

10. Die Werte von x_2 und x_4 sind frei wählbar; wir setzen $x_2 = s$ und $x_4 = t$ willkürlich fest und rollen das LGS von unten her auf: $x_3 = 2t + 4$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $x_1 = -s - \frac{3}{4}(2t+4) + \frac{1}{2}t + 4 = -s - t + 1$. Damit ist die allgemeine Lösung
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Anders gesagt, die Lösungsmenge ist
$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definition. Der *von den Vektoren* $u^{(1)}, \ldots, u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *aufgespannte Teilraum* ist die Menge
$$\langle u^{(1)}, \ldots, u^{(k)} \rangle := \{\alpha_1 u^{(1)} + \ldots + \alpha_k u^{(k)} : \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$
Ausdrücke der Form $\alpha_1 u^{(1)} + \ldots + \alpha_k u^{(k)}$ heißen *Linearkombinationen* der Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}$. Teilräume heißen auch *Unterräume oder lineare Teilräume.* Im Fall $k = 0$ setzen wir $\langle\rangle = \{0\}$.

Satz (ohne Beweis). Die Lösungsmenge $L_0 = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}$ eines homogenen linearen Gleichungssystems ist stets ein Teilraum.

Satz. Ist $u \in \mathbb{R}^m$ irgendeine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$, ist also $Au = b$, dann ist die Lösungsmenge $L_b = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = b\}$ gegeben durch
$$L_b = u + L_0 := \{u + y : y \in L_0\}.$$
(Man beachte aber, dass L_b leer sein kann, obwohl L_0 nicht leer ist.)

Beweis. Wenn $Ax = b$, dann sei $y = x - u$; daher $Ay = A(x - u) = Ax - Au = b - b = 0$, also $y \in L_0$; also $L_0 \subseteq u + L_0$. Sei nun $y \in L_0$ beliebig und $x = u + y$, dann gilt $Ax = A(u + y) = Au + Ay = b + 0 = b$; also $u + L_0 \subseteq L_b$. Insgesamt $L_b = u + L_0$.□

Bemerkung. Mengen der Form $u + L_0$, wobei L_0 ein Teilraum ist, heißen auch *affine Teilräume.* Sie entstehen aus (linearen) Teilräumen durch Translation.