9 Konvergenz und Stetigkeit

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$ heißt *beschränkt*, wenn es $r > 0$ gibt mit $\|f(x)\| \leq r$ für alle $x \in D$.

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn ihr Graph in einem horizontalen Streifen eingeschlossen ist. Eine unbeschränkte Funktion wächst "ins Unendliche".

Funktion f	$D \to \mathbb{R}^d$	beschränkt?
$\sin, \cos$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	ja, $r = 1$
$\arcsin, \arccos$	$[-1, 1] \to \mathbb{R}$	ja, $r = 2\pi$
$\tan$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$	nein
$\arctan$	$\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	ja, $r = \frac{\pi}{2}$
$\exp$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	nein
$\exp$	$(-\infty, 0] \to \mathbb{R}$	ja, $r = 1$
$\log$	$(0, \infty) \to \mathbb{R}$	nein
Fibonacci	$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$	nein
$x \mapsto x^\alpha$	$(0, \infty) \to \mathbb{R}$	ja für $\alpha = 0$, nein für $\alpha \neq 0$
$x \mapsto x^\alpha$	$[1, \infty) \to \mathbb{R}$	ja für $\alpha \leq 0$, nein für $\alpha > 0$
$x \mapsto Ax$	$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$	ja für $A = 0$, sonst nein
für $A \in \mathcal{M}(n, m)$		
$x \mapsto \|x\|$	$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	nein

Definition: Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von Vektoren $a_n \in \mathbb{R}^d$ heißt *konvergent gegen den Vektor* $a \in \mathbb{R}^d$, geschrieben $a_n \to a$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > n_0$ gilt $\|a_n - a\| < \varepsilon$, in Kurzform $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 :\ \|a_n - a\| < \varepsilon$. In diesem Fall heißt a der *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; man sagt auch, a_n *geht gegen* a. Ist eine Folge gegen keinen Vektor konvergent, so heißt sie *divergent*.

Beispiele: Die Folge $a_n = 1/n \in \mathbb{R}$ konvergiert gegen 0. Die Folge $+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots$ divergiert. Die Folge

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \ldots$$

konvergiert gegen π. Die Folge

$$1, 1 + \tfrac{1}{2}, 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}, 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}, \ldots, \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}, \ldots$$

konvergiert gegen 2. Allgemein nennt man eine Folge der Form

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

eine *(unendliche) Reihe* und nennt den Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ oder } b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$$

konvergent gegen a wenn die *Folge der Partialsummen* a_n gegen a konvergiert. Man nennt dann a auch den *Wert* dieses Ausdrucks.

Satz (ohne Beweis): Eine Folge a_n in $\mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann (dann und nur dann) gegen $a \in \mathbb{R}^d$, wenn in $\mathbb{R}$ jede Komponente $a_{n,i}$ gegen a_i konvergiert. ("Konvergenz gilt komponentenweise.")

Da sich eine Folge als Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ auffassen lässt, ist sie genau dann beschränkt, wenn es $r > 0$ gibt, so dass $-r \leq a_n \leq r$ für alle Folgenglieder a_n gilt.

Satz (ohne Beweis): Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}^d$ ist beschränkt.

Folgerung. Die Fibonacci-Folge divergiert. Die Folge $0, 2, 4, 6, \ldots$ der geraden Zahlen divergiert. Es gibt also zwei Arten zu divergieren: entweder ins Unendliche, oder beschränkt (rastloses Umherlaufen wie $+1, -1, +1, -1, \ldots$).

Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *stetig*, wenn für jede konvergente Folge $a_n \to a$ mit $a_n \in D, a \in D$ gilt $f(a_n) \to f(a)$.

Beispiele: Die *Heaviside-Funktion*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig, weil die Folge $a_n = -1/n$ gegen $a = 0$ konvergiert, aber $f(a_n) = 0$ für alle n, während $f(a) = 1$. Anschaulich ist eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne abzusetzen. Die folgenden Funktionen sind stetig: $\sin, \cos, \tan, \arcsin, \arccos, \arctan, \exp, \log, x \mapsto x^\alpha$ auf $D = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $x \mapsto Ax$ auf $D = \mathbb{R}^m$, $x \mapsto \|x\|$.

Satz über Fourierreihen (ohne Beweis): Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periodenlänge T, dann gibt es reelle Zahlen $c_0, c_1, c_2, \ldots \geq 0$ und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in [0, 2\pi)$ so, dass

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $\omega = 2\pi/T$. Die rechte Seite heißt die *Fourier-Reihe* von f.

Anwendung: Obertonreihe in der Akustik. Jeder Ton, physikalisch eine periodische Schwankung des Luftdrucks, lässt sich auffassen als zusammengesetzt aus harmonischen Schwingungen (Sinustöne, manchmal reine Töne genannt) der Form $\sin(\omega t + \varphi)$ mit Frequenzen, die ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind, also $c_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$. Der Term mit $k = 1$ heißt *Grundton*, die anderen die *Obertöne*; c_k^2 ist die Intensität (Energieinhalt) der k-ten Oberschwingung, c_k heißt Amplitude, φ_k die Phasenverschiebung.

Satz (ohne Beweis): Wenn für die Zahlenfolgen a_n, b_n und c_n gilt $a_n \leq b_n \leq c_n$ und $a_n \to a$ und $c_n \to a$, dann auch $b_n \to a$.

Satz (ohne Beweis). Sei $q \in \mathbb{R}$; die Zahlenfolge $a_n = q^n$ (geometrische Folge) konvergiert genau dann, wenn $-1 < q \leq 1$; für $q = 1$ konvergiert sie gegen 1, für $|q| < 1$ gegen 0.

Satz (ohne Beweis): Wenn die Folgen $a_n, b_n \in \mathbb{R}^d$ konvergieren, $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann konvergieren auch die Summen, $a_n + b_n \to a + b$, und die Vielfachen, $\alpha a_n \to \alpha a$. Sind $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ Zahlenfolgen (statt Vektoren), dann konvergieren auch die Produkte, $a_n b_n \to ab$.

Satz. Die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

mit $q \in \mathbb{R}$ konvergiert gegen $1/(1-q)$, wenn $|q| < 1$, und divergiert andernfalls.