15 Integration in mehreren Variablen

Volumen-Integrale. Variiert die Dichte $\rho(u)$ eines Materials mit dem Ort $u \in \mathbb{R}^3$ im Innern des Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^3$, so erhält man die Masse durch das *Volumenintegral*

$$m = \int_K \rho(u)\, d^3u = \int_K \rho(u)\, dV$$

(2 Schreibweisen, V wie Volumen). K kann z.B. ein Quader sein, eine Kugel, eine Kartoffel (d.h. unregelmäßige Form). In wesentlichen Zügen die Definition des Volumenintegrals: Man zerlegt die 3-dimensionale Menge K, die jetzt das Intervall $[a, b]$ ersetzt, in kleine Teilmengen K_i, $i = 1, \dots, n$; z.B. Würfelchen der Kantenlänge δ; dann definiert man Riemannsche Ober- und Untersumme,

$$S_O = \sum_{i=1}^{n} \max\{\rho(u) : u \in K_i\}\, Vol(K_i)$$

$$S_U = \sum_{i=1}^{n} \min\{\rho(u) : u \in K_i\}\, Vol(K_i).$$

Nun betrachtet man eine Folge immer feinerer Zerlegungen, $\delta \to 0$; der Limes der Ober- und der Untersummen ist gleich, und das definiert man als das Volumenintegral.

Satz von Fubini: Ist K ein achsenparalleler Quader, $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, dann gilt

$$\int_K \rho(u)\, d^3u = \int_{a_1}^{b_1} \Big(\int_{a_2}^{b_2} \Big(\int_{a_3}^{b_3} \rho(u_1, u_2, u_3)\, du_3 \Big) du_2 \Big) du_1.$$

Dabei spielt die Reihenfolge der drei Integrationen keine Rolle.

Anschaulicher Kerngedanke: man nimmt für die Teilmengen K_i sehr kleine ("unendlich kleine") achsenparallele Quader mit Kantenlängen du_1, du_2, du_3. Dann ist $Vol(K_i) = du_1\, du_2\, du_3$ das Produkt der Kantenlängen. Die Funktion ρ ist nahezu konstant in jedem Quader. Die Summanden ordnet man so, dass man zuerst für festes u_1 und u_2 über u_3 summiert.

Bsp: Rauminhalte. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und

$$1_B(u) = \begin{cases} 1 & \text{falls } u \in B, \\ 0 & \text{falls } u \notin B \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* der Menge B. Dann ist

$$Vol(B) = \int_{\mathbb{R}^3} 1_B(u)\, d^3u = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_B(u)\, du_1\, du_2\, du_3.$$

Daher läuft die Berechnung von Volumina auf Integralaufgaben hinaus.

Weglänge. Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$; der Polygonzug, der x_1 mit x_2, dann x_3, …, x_n verbindent, hat die Länge

$$L_P = \sum_{i=1}^{n-1} d(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\|.$$

Um die Länge L_γ einer (differenzierbaren) Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ zu bestimmen, approximieren wir L zunächst dadurch, dass wir zahlreiche Punkte entlang der Kurve wählen und die Länge L_P des Polygonzugs ermitteln. Das bedeutet nicht anderes, als zahlreiche Punkte $t_1, \ldots, t_n$ im Intervall $[a, b]$ zu wählen, und

$$L_P = \sum_{i=1}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

zu erhalten. Sind die Parameterabstände $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ klein genug, dann verläuft die Kurve zwischen $\gamma(t_i)$ und $\gamma(t_{i+1})$ näherungsweise geradlinig, so dass

$$\gamma(t_{i+1}) \approx \gamma(t_i) + \dot{\gamma}(t_i)\,\Delta t_i$$

(Tangentengleichung). In die vorige Gleichung eingesetzt, liefert dies

$$L_P \approx \sum_{i=1}^{n-1} \|\dot{\gamma}(t_i)\|\,\Delta t_i\,.$$

Wir betrachten nun den Limes $\Delta t \to 0$, in dem wir die Stützpunkte t_i immer enger wählen. Wie man raten würde (und sich tatsächlich beweisen lässt), konvergiert dann

$$L_P \to \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt =: L_\gamma.$$

Dieses Integral kann als Definition der Weglänge von γ betrachtet werden.

Beispiel. Sei $\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t}\cos(\omega t) \\ e^{-\lambda t}\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\lambda e^{-\lambda t}\cos(\omega t) - \omega e^{-\lambda t}\sin(\omega t) \\ -\lambda e^{-\lambda t}\sin(\omega t) + \omega e^{-\lambda t}\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = e^{-\lambda t}\sqrt{\lambda^2\cos^2 + 2\lambda\omega\sin\cos + \omega^2\sin^2 + \lambda^2\sin^2 - 2\lambda\omega\sin\cos + \omega^2\cos^2} = e^{-\lambda t}\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}.$$

$$L_\gamma = \int_0^\infty \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}(-\lambda^{-1})(0 - 1) = \frac{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}}{\lambda}$$

In diesem Beispiel hat die Kurve ein endliche Länge, obwohl sie unendliche Zeit dafür benötigte. (Wenn Ihnen das seltsam erscheint, bedenken Sie, dass dies auch für $\gamma(t) = (0, 1 - e^{-\lambda t})$ der Fall wäre.)

Wegintegrale und Gradientenfelder. Gegeben ein Vektorfeld $K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (stellen Sie sich z.B. ein Kraftfeld vor) und ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^d$. Dann bezeichnet man als das *Wegintegral von K entlang γ* den Ausdruck

$$\int_\gamma K(x) \cdot dx := \int_a^b K(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt\,,$$

wobei das Punktprodukt oder Skalarprodukt durch

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$$

definiert ist.

Beispiel. Ist K ein Kraftfeld, so ist das Wegintegral die mechanische Arbeit (die das Kraftfeld an dem Teilchen leistet).

Beispiel. Ist $K = \nabla f$, so gilt nach der Kettenregel

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$$

und daher (nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)

$$\int_\gamma \nabla f(x) \cdot dx = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,.$$

Dies gilt jedoch nicht, wenn K kein Gradientenfeld ist! Da das Wegintegral dann nur von f an den Endpunkten des Weges abhängt, ist insbesondere das Wegintegral *wegunabhängig*, d.h. jeder andere Weg γ_2 zwischen denselben Endpunkten $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ liefert dasselbe Wegintegral.

Tatsächlich ist bei weitem nicht jedes Vektorfeld ein Gradientenfeld. Dies ist ein grundlegender Unterschied zur Differenzialrechnung in einer Variablen, wo (nach dem Hauptsatz) jede stetige Funktion die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist. Ist ein Kraftfeld K ein Gradientenfeld, $K = \nabla f$, so heißt $-f$ das *Potenzial*.

Satz. Ein stetiges Vektorfeld $K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i}\,.$$

Wir können leicht nachvollziehen, dass diese Bedingung tatsächlich für jedes Gradientenfeld gilt; denn $K_i = \partial f / \partial x_i$, und partielle Ableitungen vertauschen. Hier ist ein

Beispiel für ein (stetiges) Vektorfeld, das kein Gradientenfeld ist:

$$K\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial K_1}{\partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial K_2}{\partial x_1} = 1.$$

Gradientenfelder heißen manchmal (besonders in der Thermodynamik = Wärmelehre) auch *vollständige Differenziale* oder *totale Differenziale*, andere Vektorfelder dagegen *unvollständige Differenziale*.

Satz. Die Wegintegrale über das stetige Vektorfeld K sind genau dann wegunabhängig, wenn K ein Gradientenfeld ist.

Beweisskizze. Wir haben bereits gesehen, dass das Wegintegral über ein Gradientenfeld wegunabhängig ist. Sei K nun ein stetiges Vektorfeld, bei dem alle Wegintegrale wegunabhängig sind (also nur von den Endpunkten des Weges abhängen). Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ wähle einen Weg γ vom Ursprung nach x und setze

$$f(x) = \int_\gamma K(y) \cdot dy$$

(unabhängig von der Wahl von γ). Indem man für γ einen Weg betrachtet, der den Punkt x in x_i-Richtung erreicht, lässt sich nachweisen, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = K_i(x), \quad \text{also } K = \nabla f.$$