

## 16 Differenzialgleichungen

Eine Differenzialgleichung (DGL) drückt die Eigenschaft einer (oftmals gesuchten) Funktion  $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^d$ , dass ihre ersten  $k$  Ableitungen in einer festen funktionalen Beziehung zu einander stehen:

$$\frac{d^k x}{dt^k}(t) = f\left(x(t), \frac{dx}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}(t), t\right)$$

Dabei heißt  $k$  die *Ordnung* der DGL,  $d$  die Anzahl der *Freiheitsgrade*. Man bezeichnet diese Gleichung auch als *System von  $d$  gekoppelten Gleichungen* (wenn man als die Variablen nicht den Vektor  $x(t) \in \mathbb{R}^d$ , sondern die Komponenten  $x_1(t), \dots, x_d(t) \in \mathbb{R}$  auffasst). Falls  $f$  nicht von  $t$  abhängt, so heißt die DGL *autonom*.

Bsp: Die harmonische Schwingungsgleichung (“harmonischer Oszillator”)

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

ist autonom, in einem Freiheitsgrad und von zweiter Ordnung mit  $f(x, y, t) = -\omega^2 x$  und  $d = 1$ . Diese Gleichung gilt u.a. für elastische Materialien, die nur in einer Richtung schwingen können (z.B. Gewicht an einer Feder) und für Fadenpendel bei kleiner Auslenkung. Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = c \sin(\omega t + \varphi),$$

wobei  $c \geq 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  beliebig sind.

Bsp: Newtonsche Mechanik besagt, dass die Welt aus  $n$  Teilchen besteht (vielleicht  $n = 10^{80}$ ), die sich im  $\mathbb{R}^3$  bewegen entlang von Bahnen  $r_i(t)$  mit

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \left( \frac{\gamma \mu_i \mu_j}{m_i} - \frac{q_i q_j}{4\pi \varepsilon_0 m_i} \right) \frac{r_j - r_i}{\|r_j - r_i\|^3}$$

und den Parametern  $\mu_i =$  schwere Masse,  $m_i =$  träge Masse,  $q_i =$  elektrische Ladung,  $\gamma =$  Newtonsche Gravitationskonstante,  $\varepsilon_0 =$  Dielektrizität des Vakuums. Merkregel “Kraft = Masse mal Beschleunigung”. Empirisch beobachten wir  $\mu_i = m_i$ . Hier  $k = 2, d = 3n$ .

Bsp: Eine Population habe konstante Wachstumsrate  $w = g - s$ ,  $g =$  Geburtenrate,  $s =$  (natürliche) Sterberate. Das einfachste Modell für die Populationsgröße  $N(t)$  ist

$$\dot{N} = wN,$$

eine autonome DGL erster Ordnung in einem Freiheitsgrad mit der allgemeinen Lösung  $N(t) = N_0 e^{wt}$  (exponentielles Wachstum). Entnimmt der Mensch (durch Ernten, Jagen, Fischen) die Menge  $E(t) dt$  im Zeitintervall  $[t, t + dt]$ , so lautet die DGL

$$\dot{N} = wN - E.$$

Diese Gleichung ist nicht-autonom,  $f(N, t) = wN - E(t)$ . Ist die Funktion  $t \mapsto E(t)$  explizit bekannt, z.B.  $E(t) = ce^{\lambda t}$ , lässt sich  $N(t)$  bestimmen (entweder analytisch oder numerisch). Oft stellt man aber auch die Frage, wie man  $E$  wählen sollte, um ein bestimmtes Verhalten von  $N$  zu erhalten (z.B. keine dramatische Schrumpfung).

**Reduktion von Gleichungen höherer Ordnung auf Gleichungen erster Ordnung.** Jede DGL ist äquivalent zu einer DGL erster Ordnung, indem man für die Ableitungen von  $x$  neue Variablen einführt. Bsp: aus dem harmonischen Oszillator machen wir

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 x.$$

Damit haben wir eine DGL erster Ordnung in 2 Freiheitsgraden. Allgemein wird so aus einer DGL der Ordnung  $k$  in  $d$  Freiheitsgraden eine DGL erster Ordnung in  $kd$  Freiheitsgraden:

$$\dot{x} = y_1, \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dots, \quad \dot{y}_{k-1} = f(x, y_1, \dots, y_{k-1}, t),$$

wobei  $y_i(t) \in \mathbb{R}^d$ . Der Raum  $\mathbb{R}^{kd}$  mit den Achsen  $x, y_1, \dots, y_{k-1}$  heißt *Phasenraum*.

Bsp: Beim harmonischen Oszillator ist der Phasenraum 2-dimensional, mit Achsen  $x$  und  $v$  (Ort und Geschwindigkeit). Die allgemeine Lösung wird zu

$$x(t) = c \sin(\omega t + \varphi), \quad v(t) = \omega c \cos(\omega t + \varphi),$$

was Ellipsen im Phasenraum entspricht. In der Newtonschen Mechanik ist der Phasenraum  $6n$ -dimensional.

**Reduktion auf autonome Gleichungen.** Jede DGL (erster Ordnung) ist äquivalent zu einer autonomen DGL, indem man eine weitere Variable  $x_{d+1}$  einführt und die zusätzliche Gleichung  $\dot{x}_{d+1} = 1$ . Also, aus

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_d, t), \dots, \dot{x}_d = f_d(x_1, \dots, x_d, t)$$

wird

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}), \dots, \dot{x}_d = f_d(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}), \quad \dot{x}_{d+1} = 1.$$

**Satz von Picard und Lindelöf (1890) (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung).** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $f$  ein Vektorfeld auf  $D$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Wir betrachten die autonome DGL erster Ordnung als Anfangswertproblem

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Unter technischen Bedingungen an  $D$  und  $f$  ( $D$  eine offene Menge,  $f$  ist dehnungsbeschränkt (Lipschitz-Bedingung)) gilt: Für jedes  $x_0 \in D$  existiert genau eine Lösungsfunktion  $t \mapsto x(t)$  von (1). Sie ist definiert auf einem Intervall  $(T_{\text{Anfang}}, T_{\text{Ende}})$ , das  $t_0$  enthält, wobei  $T_{\text{Anfang}} = -\infty$  und/oder  $T_{\text{Ende}} = \infty$  sein kann, aber nicht sein muss.

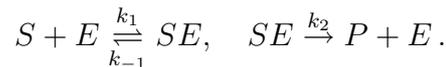
Erste Schritte zu diesem Satz gehen auf Isaac Newton und Leonhard Euler (Anfang 18. Jahrhundert) zurück.

Folgerung. Zwei Lösungskurven können sich nie schneiden. Denn erfüllen die Funktionen  $g$  und  $h$  beide die DGL, also  $\dot{g} = f(g)$  und  $\dot{h} = f(h)$ , und würden sie sich zur Zeit  $t_0$  schneiden, also  $g(t_0) = h(t_0)$ , dann folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung, dass  $g(t) = h(t)$  für alle  $t$ .

Folgerung. Bei einer DGL der Ordnung  $k$  in  $d$  Freiheitsgraden kann man  $kd$  Anfangswerte wählen. Bsp:  $6n$  in der Newtonschen Mechanik.

Eine Lösung kann nach endlicher Zeit aufhören zu existieren, indem  $x(t)$  den Rand des Definitionsbereiches  $D$  erreicht. Bsp: Wenn  $x$  eine reelle Größe ist, die keine negativen Werte annehmen kann, so ist  $D = [0, \infty)$ , und sobald  $x(t)$  auf Null absinkt, kann es nicht mehr weiter sinken. Die zweite Möglichkeit, wie eine Lösung nach endlicher Zeit aufhören kann, zu existieren, besteht darin, dass sie in endlicher Zeit ins Unendliche wächst.

**Weiteres Beispiel.** Michaelis–Menten-Kinetik (1913). Als vereinfachte biochemische Reaktion unter Einfluss eines Enzyms betrachten wir



Das heißt, ein Molekül des Substrates  $S$  bildet mit einem Molekül des Enzyms  $E$  einen Komplex  $SE$  (auf umkehrbare Weise), dann entsteht (auf unumkehrbare Weise) aus dem Komplex ein Molekül des Produktes  $P$ , wobei das Enzym wieder frei wird. Dabei sind die Konstanten  $k_{-1}, k_1$  und  $k_2$ , genannt *Ratenkonstanten*, die Parameter, die die Reaktionsraten (Reaktionsgeschwindigkeiten) für jede der Teilreaktionen wie folgt festlegen. Das *Massenwirkungsgesetz* besagt, dass die Reaktionsrate proportional ist zum Produkt der Konzentrationen der Reaktanten. Wir bezeichnen die Konzentrationen mit

$$s = [S], \quad e = [E], \quad c = [SE], \quad p = [P].$$

Dann lautet das DGL-System, die dem Massenwirkungsgesetz entspricht:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -k_1es + k_{-1}c, & \frac{de}{dt} &= -k_1es + (k_{-1} + k_2)c \\ \frac{dc}{dt} &= k_1es - (k_{-1} + k_2)c, & \frac{dp}{dt} &= k_2c. \end{aligned}$$

Als Anfangsbedingungen wählen wir solche, die dem Beginn der Reaktion entsprechen:

$$s(0) = s_0, \quad e(0) = e_0, \quad c(0) = 0, \quad p(0) = 0.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems liefert uns die Konzentrationen als Funktion der Zeit.

Dieses DGL-System lässt sich noch etwas vereinfachen. Erstens: Die letzte Gleichung ist *entkoppelt* von den anderen (da  $p$  in den anderen Gleichungen nicht eingeht); daher lässt sich die Lösung direkt angeben,

$$p(t) = k_2 \int_0^t c(u) du,$$

sobald  $c(t)$  bekannt ist. Zweitens: Da das Enzym  $E$  bloß ein Katalysator ist, ist seine Gesamtkonzentration, frei plus kombiniert, konstant; d.h.

$$\frac{de}{dt} + \frac{dc}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad e(t) + c(t) = e_0.$$

Eine solche Aussage nennt man einen *Erhaltungssatz* (vgl. Energie-Erhaltungssatz, z.B. in der Newtonschen Mechanik). Er kann auch mathematisch aus dem DGL-System gefolgert werden, indem man die zweite und die dritte Gleichung addiert. Wir erhalten somit das vereinfachte DGL-System

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1})c, \\ \frac{dc}{dt} &= k_1 e_0 s - (k_1 s + k_{-1} + k_2)c \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingungen  $s(0) = s_0, c(0) = 0$ .

Dieses DGL-System lässt sich nicht analytisch lösen, aber man kann bereits das qualitative Verhalten der Lösung ablesen: Bei  $t = 0$  fällt  $s$ , während  $c$  steigt, von 0 beginnend; solange  $c$  noch klein ist, muss  $s$  weiter fallen und  $c$  weiter steigen;  $c$  steigt so lange bis  $dc/dt = 0$ , d.h.  $c = k_1 e_0 s / (k_1 s + k_{-1} + k_2)$ ; an dieser Stelle gilt  $ds/dt = -k_2 c$ , also fällt  $s$  immer noch. Da für  $t \rightarrow \infty$  die Reaktion alles Substrat und den Substrat-Enzym-Komplex komplett in das Produkt umwandelt, wissen wir, dass  $s(t) \rightarrow 0$  und  $c(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .