Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2006/07
25.10.2006
Blatt 02

Übungen zu „Mathematik für Physiker I“

1. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen und bestimmen Sie maximale Intervalle auf $\mathbf{R}$, wo diese injektiv sind:
$$f(x) = |x|, \qquad g(x) = |x^2 - 1|, \qquad h(x) = \frac{1}{2}\left|-|x| + 1 + ||x| - 1|\right|.$$

2. (a) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:
   (i) Ist $g \circ f$ injektiv, so auch f;
   (ii) ist $g \circ f$ surjektiv, so auch g.

   (b) Zeigen Sie: Es ist $f\colon A \to B$ genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g\colon B \to A$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$ ist.

3. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbf{N}$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$
(Können Sie auch einen geschlossenen Ausdruck für $\sum_{k=1}^{n} k^4$ finden?)

4. Wo steckt der Fehler in folgendem “Beweis”der Aussage “Ist auf einem Parkplatz von n Autos eines rot, so sind sie alle rot”?

   “*Beweis.*” Induktionsanfang ($n = 1$): Steht auf einem Parkplatz nur ein Auto und dieses sei rot, so sind sicher alle Autos dort rot.
   Induktionsschritt ($n \to n+1$): Man nummeriere die Autos durch, $A_1, \ldots, A_{n+1}$, und betrachte die Gruppe G_1 der ersten n Autos, $G_1 = \{A_1, \ldots, A_n\}$, und die Gruppe G_2 der letzten n Autos, $G_2 = \{A_2, \ldots, A_{n+1}\}$. Wählen wir die Nummerierung so, dass das rote Auto weder als erstes noch als letztes aufgezählt wird, so können wir die Induktionsvoraussetzung sowohl auf G_1 als auch auf G_2 anwenden. Es sind also $A_1, \ldots, A_n$ rot, aber auch $A_2, \ldots, A_{n+1}$; also sind alle $n+1$ rot.

Abgabe: Dienstag, 31. Oktober 2006, in den Übungen