Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2006/07
29.11.2006
Blatt 07

Übungen zu „Mathematik für Physiker I“

1. Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ an, die in $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ unstetig, in allen anderen Punkten aber stetig ist.

2. Sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ stetig. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt haben muss, d.h.: es gibt ein $\xi \in [0,1]$, so dass $f(\xi) = \xi$ ist. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x) - x$.)

3. (a) Geben Sie (mit einer Skizze des Graphen) eine stetige Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ an, die jeden Wert genau dreimal annimmt.
   (b) Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ geben kann, die jeden Wert genau zweimal annimmt.

4. (a) Zeigen Sie, dass für alle $y_1, y_2 \geq 0$ gilt: $\sqrt{y_1 y_2} = \sqrt{y_1}\sqrt{y_2}$.
   (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ eine Nullfolge ist. Wogegen konvergiert $(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n})$?
   (c) Zeigen Sie, dass $(\sqrt[n]{n})$ gegen 1 konvergiert. (Hinweis: Man setze $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ und benutze “Binomis” Folgerung $(1 + h_n)^n \geq \binom{n}{2} h_n^2$.)

Abgabe: Mittwoch, 06. Dezember 2006