

Übungen zu „Mathematik für Physiker I“

1. Seien $0 < a < b$. Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2b, Blatt 09 und des Hauptsatzes das Integral

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes: Ist $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar und $f' = \text{const.}$, so ist f affin-linear.

3. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Hat f in $x_0 = a$ ein Minimum, so ist $f'(a) \geq 0$; hat f in $x_0 = b$ ein Maximum, so ist $f'(b) \leq 0$.

(b) (Satz von Darboux): Ist $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$. (Beachten Sie, dass f' nicht stetig zu sein braucht.)

4. Zeigen Sie, dass der Hauptsatz sogar für alle integrierbare Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ gilt, die eine Stammfunktion besitzen. (Hinweis: Ist \mathcal{Z}^r eine Folge von Zerlegungen, deren Feinheiten gegen Null geht, so wähle man (mit Hilfe des MWS'es) eine geeignete Zwischenstellenwahl ξ^r von \mathcal{Z}^r und benutze, dass die Riemannschen Summen $S(f; \mathcal{Z}^r, \xi^r)$ gegen $\int_a^b f(x) dx$ konvergieren (auch wenn f nicht stetig ist, vgl. (7.18b) der Vorlesung).)

**FROHE WEIHNACHTEN UND EIN GUTES
NEUES JAHR**

Abgabe: Mittwoch, 10. Januar 2007