Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2006/07
17.01.2007
Blatt 12

Übungen zu
„Mathematik für Physiker I“

1. Sei $c \in \mathbf{R}$. Differenzieren Sie die Funktionen $f, g, h\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$:

$$f(x) = x^c, \qquad g(x) = x^x, \qquad h(x) = x^{x^x}$$

2. Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = f$, so existiert ein $c \in \mathbf{R}$, so dass $f(x) = ce^x$ für jedes $x \in \mathbf{R}$ ist. (Hinweis: Man differenziere $x \mapsto e^{-x} f(x)$.)

3. Man definiert die hyperbolischen Funktionen $\cosh, \sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

   (a) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbf{R}$: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

   (b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbf{R}$: $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$.

   (c) Zeigen Sie, dass $\cosh|(0,\infty)\colon (0,\infty) \to (1,\infty)$ und $\sinh|(0,\infty)\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ bijektiv sind. Ihre Umkehrungen werden mit $\mathrm{Arcosh}\colon (1,\infty) \to (0,\infty)$ und $\mathrm{Arsinh}\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ bezeichnet. Berechnen Sie die Ableitungen von Arcosh und Arsinh.

4. Berechnen Sie das unbestimmte Integral:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx$$

   (Hinweis: Man substituiere zunächst $x = \sinh(u)$ und führe anschließend eine partielle Integration durch.)

Abgabe: Mittwoch, 24. Januar 2007