Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2006/07
31.01.2007
Blatt 14

Übungen zu „Mathematik für Physiker I“

1. Bestimmen Sie die Taylorpolynome der Funktionen tan und arcsin im Punkt $a = 0$ der Ordnung 5.

2. Zeigen Sie: Ist $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbf{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = 1 + f^2$, so existiert ein $c \in \mathbf{R}$, so dass $f(x) = \tan(x + c)$ für alle $x \in I$ ist. (Hinweis: Man differenziere $x \mapsto \arctan(f(x))$.)

3. (a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbf{R}$ mit $|\arctan(x) + \arctan(y)| < \pi/2$ gilt:
$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan(x) + \arctan(y)$$
   (b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbf{R}$ mit $x, y, x + y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt:
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$
   differenzierbar ist (auch in $a = 0$), aber ihre Ableitung im Nullpunkt unstetig ist.

Abgabe: Mittwoch, 07. Februar 2007