Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2006/07
07.02.2007
Blatt 15

Übungen zu „Mathematik für Physiker I“

1. Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha > 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$$

2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in [-1, 1]$ gilt:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

(Hinweis: $R_{2n,0}(x) = R_{2n+1,0}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.)

3. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 3a, Blatt 14, dass

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$$

ist und benutzen Sie dann die Restglieddarstellung aus Aufgabe 2, um π auf 12 Stellen genau zu berechnen.

4. (Regel von l'Hôpital) Seien $f, g\colon (a, b) \to \mathbf{R}$ differenzierbar mit $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, für alle $x \in (a, b)$, und $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Es existiere der Grenzwert von $f'(x)/g'(x)$ für $x \to a$. Zeigen Sie, dass dann auch der Grenzwert von $f(x)/g(x)$ für $x \to a$ existiert und es gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Hinweis: Man setze $f(a) = g(a) = 0$ und wende dann den 2. Mittelwertsatz an.)

Abgabe: Mittwoch, 14. Februar 2007