Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 5 (Abgabe am 14.11.2007)

Aufgabe 19 (10 Punkte)

Bei einer Tierpopulation verhalte sich die Geburtenrate g (Anzahl Geburten pro Jahr pro Populationsgröße) in Abhängigkeit von der Populationsdichte d (Anzahl Individuen pro Quadratkilometer) gemäß $g = 0,5 + 0,2d$, die Sterberate s gemäß $s = 0,3 + 0,25d$. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch: Für welche d schrumpft die Population, für welche wächst sie, für welche bleibt sie konstant?

Aufgabe 20 (10 Punkte)

Beweisen Sie aus den Potenzrechenregeln die folgenden Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus für alle $x, y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(1/x) = -\log(x)$$

$$\log(1) = 0$$

$$\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)$$

$$\text{wenn } x < y, \text{ dann } \log(x) < \log(y).$$

Aufgabe 21 (Radiokarbon-Methode der Altersbestimmung) (10 Punkte)

Das radioaktive Kohlenstoff-Isotop C^{14} hat eine Halbwertszeit von 5568 Jahren ("Libby-Halbwertszeit"). Da C^{14} durch einen Prozess, bei dem kosmische Strahlung auf atmosphärischen Stickstoff einwirkt, ständig produziert wird, ist der Anteil von C^{14} an allem Kohlenstoff in der Atmosphäre und damit auch in allen Lebewesen konstant und entspricht $15,3$ Zerfällen pro Minute pro Gramm Kohlenstoff. Beim Tod endet die Zufuhr von C^{14}, es zerfällt jetzt nur noch. Daher wird totes Gewebe mit $7,65$ Zerfällen pro Minute pro Gramm Kohlenstoff auf ein Alter von 5568 Jahren geschätzt. Bestimmen Sie nach dieser Methode das Alter einer Probe aus $3,1$ Gramm Gewebe, die zu 73% aus Kohlenstoff besteht und in der $18,6$ Zerfälle pro Minute gemessen werden.

Aufgabe 22 (10 Punkte)

Zwischen den Größen x und y bestehe der Zusammenhang $y = cx^\alpha$ mit Konstanten $c, \alpha > 0$. Bestimmen Sie c und α aus den 2 Datenpaaren $x_1 = 1,7$, $y_1 = 3,57$ und $x_2 = 3,2$, $y_2 = 8,66$.

Aufgabe 23 (10 Punkte)

a) Plotten Sie die Funktionen $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3}, 2, 4$ in dasselbe Diagramm mit $x \in [0, 1.2]$.

Beispiel 4: Für einen Datenvektor `x` zeichnet

```
» plot(x,sin(x))
» hold on
» plot(x,cos(x))
» hold off
```

$\sin x$ und $\cos x$ in dasselbe Diagramm.

b) In Aufgabe 18 haben Sie die ersten Fibonacci-Zahlen F_t berechnet. Plotten Sie nun die Verhältnisse $v_t := F_{t+1}/F_t$ für $t = 1, \ldots, 1000$ (wie im folgenden Beipiel) und zum Vergleich die waagerechte Gerade $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Begründung dafür später).

Beispiel 5: Datenpunkte plotten

» `x=1:10;`
» `A=sin(x);`
» `plot(A,'sr')` erzeugt rote (`r` für red) Quadrate (`s` für square) an den Datenpunkten

Aufgabe 24 (10 Punkte)

a) Fertigen Sie einen 3D-Plot der Gauß-Funktion in 2 Variablen,

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right),$$

mit $\mu_x = 1$, $\mu_y = 2$, $\sigma_x = 2$ und $\sigma_y = 2.5$ für x und y im Intervall $[-5, 5]$ an. Zum Erstellen eines 3D-Plots gehen Sie entsprechend dem folgenden Beispiel vor.

Beispiel 6:

» `x = -1:.1:1;`
» `y = -1:.1:1;` Erzeugt unsere bekannten Datenvektoren `x` und `y` mit 21 Komponenten.
» `[X,Y] = meshgrid(x,y);` Erzeugt zwei 21×21 Matrizen `X` und `Y`, in deren Zeilen jeweils der Vektor `x` bzw. `y` steht. `X`, `Y` dienen als Punktegitter, wichtig für uns sind die Vektoren `x` und `y`. (Eine $n \times m$ Matrix ist ein Schema aus nm Zahlen in n Zeilen und m Spalten.)
» `Z = Y.^2-X.^2;` Erzeugt eine 21×21-Matrix mit den Werten $Z_{ij} = x_i^2 - y_j^2$. Dies geschieht (über Umwege) mit Hilfe der oben definierten Matrizen `X` und `Y`.
» `mesh(X,Y,Z);` Erzeugt einen 3D-Plot der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$, wobei `Z` als Funktion von x, y aufgetragen wird, welche hier in Form der Datenmatrizen `X` und `Y` erscheinen.
Testen Sie auch die Befehle:

```
» surf(X,Y,Z)
» shading interp
» colormap(hsv)
```

b) Fertigen Sie einen 3D-Plot der Sphäre mit Radius $r = 4$ und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ an. Benutzen Sie dabei die in der Vorlesung erwähnte Darstellung der Sphäre als Vereinigung zweier Funktionsgraphen. Um eine Fehlermeldung außerhalb des Definitionsbereichs der Wurzel zu vermeiden, ersetzen Sie das Kommando `sqrt(...)` durch `real(sqrt(...))`. Wie bei `plot` bewirkt das Kommando `hold on` auch hinter `mesh(X,Y,Z)`, daß der nächste Plot in dasselbe Diagramm erfolgt.