Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 6 (Abgabe am 21.11.2007)

Bitte bearbeiten Sie nun die **Aufgaben 20**, **21** und **22** von Blatt 5.

Aufgabe 25 (10 Punkte)

In Aufgabe 23 haben wir mithilfe von Matlab beobachtet, daß das Verhältnis F_n/F_{n-1} zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen offensichtlich einem Grenzwert zustrebt. Wir nehmen nun an, daß dieser Grenzwert existiert und nennen ihn α, d.h.

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}\,.$$

Bestimmen Sie α wie folgt:

- Dividieren Sie die Rekursionsvorschrift $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ durch F_{n-1}.
- Bilden Sie den Limes $n \to \infty$, um eine Gleichung für α zu erhalten.
- Lösen Sie diese (quadratische) Gleichung für α.
- Welche der beiden Lösungen ist die richtige und warum?

Aufgabe 26 (10 Punkte)

a) Eine Seemeile ist definiert als die Länge einer Bogenminute auf einem Meridian (=Großkreis, z.B. Äquator, Längenkreise,...). Berechnen Sie die Länge einer Seemeile in Kilometern! (Rechnen Sie mit einem Erdumfang von 40 000 km.)

b) Zeigen Sie, daß es zu jedem $c \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ solche Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt, daß

$$c\,\sin(x+\varphi) = \alpha\,\sin x + \beta\,\cos x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

indem Sie geeignete α und β explizit angeben.

Aufgabe 27 (Populationsmodell nach Verhulst / Logistische Gleichung) (10 Punkte)
In Aufgabe 19 haben wir ein Populationsmodell betrachtet, in dem nur bis zu einer kritischen Populationsgröße Wachstum auftrat. Darüber schrumpfte die Population im nächsten Schritt wieder. So kann man z.B. den Einfluß eines beschränkten Nahrungsangebots modellieren. Die Rekursionsgleichung für die Populationsgröße n_t (angegeben als als Bruchteil der maximal möglichen Population, d.h. $0 \leq n_t \leq 1$) zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{Z}$ ist von der Form

$$n_{t+1} = r(1 - n_t)n_t\,, \quad r \in [0, 4]$$

(in geeigneten Einheiten). Berechnen Sie mit Matlab die ersten 1000 Folgenglieder[2] für vorher definierte Variablen $n_1 \in [0, 1]$ und $r \in [0, 4]$. Illustrieren Sie jeweils durch einen Plot die folgenden Aussagen (d.h., plotten Sie jeweils die ersten Folgenglieder[3] n_t gegen t für einen Wert r aus dem jeweiligen Interval und einen Anfangswert n_1, z.B. $n_1 = 0{,}1$):

a) Für $0 \leq r \leq 1$ stirbt die Population stets monoton aus.

b) Für $1 < r \leq 2$ strebt n_t monoton gegen einen Gleichgewichtswert. (Lesen Sie den ungefähren Wert für Ihr Beispiel ab!)

c) Für $2 < r \leq 2\sqrt{2}$ strebt n_t oszillierend gegen einen Gleichgewichtswert. (Lesen Sie den ungefähren Wert für Ihr Beispiel ab!)

d) Für $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ pendelt die Populationsgröße zwischen zwei verschiedenen Werten. (Lesen Sie die ungefähren Werte für Ihr Beispiel ab!)

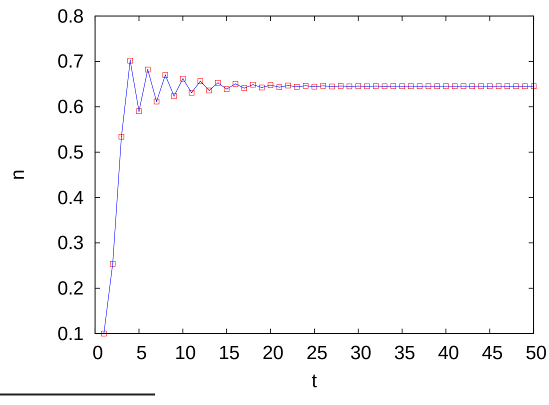
e) Für die meisten r-Werte mit $3{,}57 < r \leq 4$ verhält sich die Folge chaotisch, d.h. scheinbar zufällig.

Beispiel 7: Lösung für 27c

```
» r=2.82;
» n=zeros(1,1000);
» n(1)=0.1;
» for t=2:1000
n(t) = r * (1-n(t-1)) * n(t-1);
end
» plot(n(1:50),'sr'); hold on; plot(n(1:50)); hold off;
```

ein geeigneter Plot-Befehl in Octave wäre z.B.

```
» plot(n(1:50),'@14',n(1:50),'-3')
```



[2] Denken Sie an Aufgabe 18 und Beispiel 3.

[3] Wählen Sie die Anzahl an Folgengliedern, die Sie plotten, so daß die Aussage gut erkennbar ist – je nach Paramaterwerten sind das vielleicht 10, 30, 100 oder 1000. . .