

Mathematik I

für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 7 (Abgabe am 28.11.2007)

Aufgabe 28 (Fehlerrechnung zur Radiokarbon-Methode) (10 Punkte)

a) Bei einer Probe von 4,2 Gramm Kohlenstoff messen Sie 42 ± 3 Zerfälle pro Minute. Um festzustellen, wie sich die Mess-Ungenauigkeit auf die Ungenauigkeit des Altersschätzers auswirkt, bestimmen Sie, wie in Aufgabe 21, einmal den Altersschätzer $A(39)$ für 39 Zerfälle pro Minute und einmal den Altersschätzer $A(45)$ für 45 Zerfälle pro Minute. Beweisen Sie, dass für jede Zerfallsrate Z zwischen 39 und 45 der Altersschätzer $A(Z)$ zwischen $A(39)$ und $A(45)$ liegt.

b) Nehmen Sie nun an, dass Sie auch die Masse m der Probe nicht exakt bestimmen konnten, sondern nur als $4,2 \pm 0,2$ Gramm. Wie lautet nun, bei zwei Fehlerquellen, das Intervall, in dem die Altersschätzer $A(Z, m)$ liegen können (mit Erklärung)?

Aufgabe 29 (10 Punkte)

Zwei Kreise im \mathbb{R}^2 mit gegebenen Mittelpunkten $v, V \in \mathbb{R}^2$ und Radien $r, R > 0$ schneiden sich in höchstens zwei Punkten. Gewinnen Sie auf folgende Weise eine Formel für die Koordinaten dieser Punkte: Gehen Sie aus von den Gleichungen, die ausdrücken, dass $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ auf den Kreisen liegt, lösen Sie eine nach u_2 auf und eliminieren Sie dadurch u_2 in der anderen; formen Sie die resultierende Gleichung für u_1 in eine quadratische Gleichung um und bestimmen Sie die Lösungen. Eine Formel für u_2 erhalten Sie am geschicktesten durch Vertauschen der Indizes 1 und 2.

Aufgabe 30 (Auflösung des Auges) (10 Punkte)

Da das menschliche Auge aus einzelnen Sehzellen besteht, sieht man tatsächlich alles "gepixelt" mit einer maximalen Auflösung (Pixelgröße) von einer halben Bogenminute. Mit welcher Auflösung ($n \times m$ Pixel) sehen Sie eine Tafel, die 2 m hoch und 3 m breit ist, wenn Sie mittig vor ihr im Abstand von 10 m sitzen?

Aufgabe 31 (Richtungsmittelung) (10 Punkte)

In einem Experiment werden folgende 4 Himmelsrichtungen (als Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn, beginnend im Osten) gemessen: $32^\circ, 46^\circ, 48^\circ, 103^\circ$. Bestimmen Sie die zugehörigen Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{R}^2$ (erste Achse nach Osten, zweite nach Norden), deren arithmetisches Mittel \bar{e} , den Einheitsvektor e_{mittel} in Richtung von \bar{e} , und dessen Winkel φ_{mittel} . Vergleichen Sie mit dem arithmetischen Mittel $\bar{\varphi}$ der Winkel.

Aufgabe 32

(10 Punkte)

Wir simulieren $N = 1000$ radioaktive Atome und nehmen an, dass jedes Atom mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 3,7\% = 0,037$ innerhalb einer Sekunde zerfällt. Für diese Simulation erzeugen Sie eine Zufallszahl⁴ $X \in [0, 1]$; gilt $X \leq 0,037$, so soll das simulierte Atom zerfallen, sonst nicht. Das Verfahren wiederholen⁵ Sie in einer Funktion⁶ `decay` so oft, bis das Atom zerfallen ist, und generieren so die zufällige Anzahl Sekunden t bis zum Zerfall. Führen Sie dies für $N = 1000$ Atome durch und plotten Sie in ein Histogramm,⁷ wie viele Atome wann zerfallen sind. Plotten Sie zum Vergleich die (zufalls-unabhängige) Anzahl der zu erwartenden Zerfälle im Zeitintervall $[t, t + 1]$

$$Z(t) = Z(0) \exp(-\lambda t)$$

mit $Z(0) = pN$; bestimmen Sie dazu zunächst λ aus

$$\exp(-\lambda \cdot 1 \text{ sec}) = 1 - p \quad (\text{warum?}).$$

Bemerkung: $Z(t)$ beschreibt den Zerfallsprozess umso besser, je größer N ist. Probieren Sie doch auch mal $N = 100$ und $N = 100\,000$.

⁴Beispiel 8: (Erzeugung von Zufallszahlen)

Der Befehl `A=rand(N)` erzeugt eine $N \times N$ -Matrix `A` mit Zufallswerten $A_{ij} \in [0, 1)$. Für unsere Zwecke reicht es aus, jeweils *eine* Zufallszahl X zu berechnen, also

```
» X=rand(1);
```

⁵Beispiel 9: (while-Schleife)

In Matlab bezeichnet

```
while(X>0.037)
t=t+1;
X=rand(1);
end
```

eine sogenannte `while`-Schleife. Die Anweisungen `t=t+1` und `X=rand(1)` werden wiederholt solange die Bedingung `(X>0.037)` erfüllt ist. (Falls `X` schon zu Beginn ≤ 0.037 ist, wird die Schleife gar nicht durchlaufen.)

⁶Beispiel 10: (eigene Funktionen)

Einfache Funktionen und Skripte speichert man unter dem Funktionsnamen mit Endung `.m` ab, in diesem Beispiel also unter `pol.m`

```
function fx=pol(x,a,b,c)
fx=a*x.^2+ b*x + c;
end
```

Die erste Zeile definiert eine Funktion `pol(x,a,b,c)` mit Eingabewerten `x`, `a`, `b`, `c` und Ausgabewert `fx`; gleichzeitig markiert sie den Beginn des Funktions-Körpers. Benötigt die Funktion keine Eingabewerte, so schreiben sie eine leere Klammer `()`; möchten Sie mehrere Werte zurückgeben, z.B. `f1x` und `f2x` statt nur `fx`, so setzen Sie diese in eine eckige Klammer, also `[f1x,f2x]`.

`fx=a*x.^2+b*x+c`; ordnet der Variablen `fx`, die am Schluß zurückgegeben wird, den Wert ax^2+bx+c zu (man beachte nochmals den Punkt für komponentenweises Arbeiten).

Die letzte Zeile `end` markiert das Ende der Funktion.

Matlab findet Ihre Funktion, wenn die Datei `pol.m` im aktuellen Arbeitsverzeichnis liegt. Sie kann dann direkt aufgerufen werden (ohne vorheriges "Laden"), z.B.

```
» pol(1:4,1,2,3)
ans = 6 11 18 27
```

⁷Beispiel 11: (Histogramm)

Der Befehl `hist(s,20)` (`s` sei hier ein Datenvektor) sortiert die Zahlenwerte in `s` in 20 Intervalle und gibt die Anzahl der Elemente in jedem Intervall in Histogramm-Form aus.