Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 10 (Abgabe am 19.12.2007)

Aufgabe 41 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie:
   (i) Für festes x mit $x > 1$ ist die Folge $f_n(x)$ unbeschränkt.
   Hinweis: Nehmen Sie an, $f_n(x)$ sei beschränkt, und führen Sie diese Aussage zum Widerspruch.
   (ii) Für festes x mit $|x| < 1$ ist die Folge $f_n(x)$ beschränkt.
   Hinweis: Geben Sie eine Schranke an (mit Begründung).

b) Berechnen Sie für $|x| \leq 1$ die Grenzfunktion $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Für welche x ist $f(x)$ stetig?

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Der antike Philosoph Zenon von Elea (490–430 v. Chr.) glaubte die Widersprüchlichkeit der Zeit so beweisen zu können: Achilles (bekannt für seine Schnelligkeit) tritt ein Wettrennen gegen eine Schildkröte an. Die Schildkröte läuft hundertmal langsamer als Achilles, erhält allerdings 10 Meter Vorsprung. Hat Achilles die ersten 10 Meter überwunden, so ist die Schildkröte bereits 10 cm weiter. Hat Achilles auch diese 10 cm zurückgelegt, so ist die Schildkröte doch schon 1 mm weiter, und so fort. So kann Achilles die Schildkröte nie einholen.

Womit Zenon nicht rechnete ist, dass eine unendliche Reihe konvergent sein (und damit einen endlichen Wert haben) kann. Bestimmen Sie die Position x_0 der Rennbahn, an der Achilles die Schildkröte überholt, auf zweierlei Weise: mit Hilfe der geometrischen Reihe, und indem Sie Gleichungen für die Position $x_A(t)$ des Achilles und die Position $x_S(t)$ der Schildkröte als Funktion der Zeit aufstellen und den Schnittpunkt aus der Gleichung $x_A(t) = x_S(t)$ ermitteln.

Aufgabe 43 (10 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Sätze aus der Vorlesung die Grenzwerte der Zahlenfolgen

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad b_n = \frac{n}{2n+1}, \quad c_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad d_n = e^{-(2n+1)}.$$

Aufgabe 44 (10 Punkte)
Sei U der von

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Teilraum des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie, ob $u^T = (3.5, 5.5, 2.5, -1)$ in U liegt, sich also in der Form

$$u = \alpha a + \beta b + \gamma c \qquad (*)$$

schreiben läßt, und wenn ja, wie die Koeffizienten α, β, γ lauten.
ANLEITUNG: $(*)$ ist offenbar ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Unbekannten α, β, γ. Es ist also jetzt der Vektor $x = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ gesucht, wobei $(*)$ die Form $Ax = u$ hat, mit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 45 (Konvergenz) (10 Punkte)
Wir fragen uns, ob die beiden unendlichen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergieren oder divergieren. Als graphischen Anhaltspunkt dafür plotten Sie in je ein Diagramm die Werte der Partialsummen

$$P_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \qquad \text{bzw.} \qquad R_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

in logarithmischen Skalenteilen, nämlich, indem Sie $N = 10^k$ setzen und P_N bzw. R_N als Funktion von k für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ plotten. Welche Reihe halten Sie für konvergent, welche für divergent?
HINWEIS: Vielleicht hilft Ihnen die Funktion `P_N.m`:

```
function [P]=P_N(N)
P=zeros(1,length(N));
for i=1:length(N)
P(i)=sum(1./[1:N(i)]);
end
```

Beispiel 14: In Matlab läßt sich die Lösung x des LGS $Ax = b$ durch sog. Matrix-Links-Division `x=A\b` erhalten; dies führt intern eine Gauß-Elimination aus. Falls es mehrere Lösungen gibt, so liefert dieses Kommando eine spezielle. Falls es keine Lösung gibt, so liefert dieses Kommando eine näherungsweise Lösung.

Beispiel 15: Analog zu `plot(X,Y)` erzeugt man in Matlab einen doppelt logarithmischen Plot durch `loglog(X,Y)`. Soll nur eine der Achsen logarithmisch sein, so kann man die Befehle `semilogx(X,Y)` oder `semilogy(X,Y)` verweden. In Aufgabe 45 können Sie aber auch einfach `plot(k,P_N(10.^k))` mit geeignetem `k` verwenden. . .