Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 11 (Abgabe am 09.01.2008)

Aufgabe 46 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen der Gauß-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

und deren Nullstellen.

Aufgabe 47 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = (1-x)^5\,, \quad f_2(x) = \sqrt{1+x^2}\,\log(2x+1)\,, \quad f_3(x) = \log_2(x)\,,$$

wobei log den natürlichen Logarithmus und $\log_2$ den binären Logarithmus (zur Basis 2) bezeichnet.

Aufgabe 48 (10 Punkte)
Eine Pipeline soll von einer Quelle (im Ursprung des $\mathbb{R}^2$) zu zwei Verbrauchern an den Punkten $u = (-1, 3)$ und $v = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ führen und dabei minimale Länge haben. Man könnte je eine Pipeline vom Ursprung nach u und nach v bauen; günstiger ist aber eine Y-förmige Anordnung: eine Pipeline nach $w = (0, w_2)$ und je eine von w nach u und von w nach v. Bestimmen Sie die Gesamtlänge L der Pipeline in Abhängigkeit von $w_2 \in [0, 3]$ und finden Sie den Wert $\tilde{w}_2$, bei dem L ihr Minimum annimmt, indem Sie dL/dw_2 Null setzen. Fertigen Sie außerdem eine Zeichnung der Minimallösung an und bestimmen Sie (rechnerisch) die drei Winkel zwischen den drei Pipelines im Punkt $\tilde{w} = (0, \tilde{w}_2)$.

Aufgabe 49 (10 Punkte)
Beweisen Sie aus der Kettenregel, der Produktregel und der Ableitung von $x \mapsto 1/x$ die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Berechnen Sie damit die Ableitung von $x \mapsto \tan x$ und drücken Sie das Ergebnis einmal mithilfe von cos und einmal mithilfe von tan aus!

Aufgabe 50 (Fourier-Reihen) (10 Punkte)

Um zu veranschaulichen, wie sich eine stetige periodische Funktion aus harmonischen Schwingungen zusammensetzen lässt, betrachten wir als Beispiel eine Dreiecksschwingung, d.h. die 2π-periodische Funktion $f(x)$ (d.h. $f(x+2\pi) = f(x)$)

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & , \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \\ x - 2\pi & , \quad x \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

(Für alle anderen x erhält man $f(x)$ durch periodische Fortsetzung.) Die zugehörige Fourier-Reihe

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx + \phi_n)$$

hat als Koeffizienten $c_1 = \frac{4}{\pi}, c_3 = \frac{1}{\pi} \cdot 0,4444, c_5 = \frac{1}{\pi} \cdot 0,16, c_7 = \frac{1}{\pi} \cdot 0,0816$ und $c_0 = c_2 = c_4 = c_6 = 0$ sowie $\phi_1 = 0$ und $\phi_i = \pi, i = 3,5,7$. Plotten Sie f und die Partialsummen

$$f_N(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n \sin(nx + \phi_n)$$

für $N = 1,3,5,7$ in ein gemeinsames Diagramm mit $x \in [0, 2\pi]$, mit einer Auflösung von $\pi/200$. Plotten Sie in ein gesondertes Diagramm die Summanden

$$g_n(x) := c_n \sin(nx + \phi_n)$$

für $n = 1,3,5,7$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Beispiel 16:
Die Heaviside-Funktion $\theta(x)$ mit

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

lässt sich in Matlab implementieren durch

```
function fx=heaviside(x)
j = find(x<0);
fx(j) = 0;
k = find(x>=0);
fx(k) = 1;
end
```

Probieren Sie auch aus, was

```
» x = 0:.5:5
» find((1<=x) & (x<3))
» x(find((1<=x) & (x<3)))
```

liefert!