Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 12 (Abgabe am 16.01.2008)

Aufgabe 51 (10 Punkte)
Bestimmen Sie (für $\lambda > 0$)

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x}\,, \quad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,, \quad \int_{-1}^1 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_1^2 \log x\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Wenn Sie eine Stammfunktion nicht erraten können, schlagen Sie unter "unbestimmte Integrale" in einem Tafelwerk, z.B. Bronstein & Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, oder im World Wide Web, z.B. unter `http://integrals.wolfram.com/`, nach und überzeugen sich durch Ableiten von der Richtigkeit.

Aufgabe 52 (10 Punkte)
Nach dem *Hookeschen Gesetz* ist die Kraft K, mit der ein elastisches Material (Gummiband, Feder) sich zu kontrahieren sucht, proportional der Dehnung s aus der Ruhelage, sofern diese nicht zu groß ist; also $K(s) = \gamma s$; die Proportionalitätskonstante $\gamma > 0$ heißt *Härte*. Welche mechanische Arbeit muss aufgewendet werden, um aus der Ruhelage die Dehnung s_0 zu erreichen?

Aufgabe 53 (10 Punkte)
In welchem Winkel φ zur Horizontalen sollte man einen Ball werfen, damit er möglichst weit fliegt? Wir beantworten diese Frage unter Vernachlässigung von Luftreibung und Wind. Die Flugbahn des Balls ist eine Wurfparabel in einer vertikalen Ebene des $\mathbb{R}^3$, die wir mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Der Ball startet im Ursprung mit Geschwindigkeit $v = (b\cos\varphi, b\sin\varphi)$, wobei $b = \|v\|$ durch Ihre Muskelkräfte vorgegeben ist. Er durchläuft dann die Parabelbahn $f(\varphi, t) = vt - \frac{1}{2}(0, g)t^2$, $g = 9.81$ ms^{-2}, bis er wieder auf der Ausgangshöhe $x_2 = 0$ eintrifft, und zwar mit der x_1-Koordinate $w(\varphi)$, der Wurfweite. (Wir sehen davon ab, dass der Abwurfpunkt 1 bis 2 m über dem Erdboden liegen kann.) Bestimmen Sie die Funktion w auf $[0, \pi/2]$ und ermitteln Sie ihr Maximum.

Aufgabe 54 (10 Punkte)
Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f : x \mapsto x^2 + x$, der Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 2$ sowie der x-Achse eingeschlossen wird.
Hinweise: (i) Die Tangente an der Stelle x_0 wird durch $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ beschrieben (vgl. Vorlesung 10). (ii) Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ und ziehen Sie die Fläche eines geeigneten Dreiecks ab. (Warum? Skizze!)

Aufgabe 55 (Numerische Integration) (10 Punkte)

Wir berechnen die Riemannschen Ober- und Untersummen für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, 2]$. Wir unterteilen dieses Intervall in N gleich große Teilintervalle. Da die Funktion f monoton wächst, nimmt sie immer am linken Rand eines Teilintervalls den kleinsten und am rechten Rand den größten Wert im Teilintervall an. Daher lauten die Ober- und Untersumme:

$$S_O(N) = \sum_{i=1}^{N} f(x_{i,\max})\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{2i}{N}\right)\frac{2}{N}\,,$$

$$S_U(N) = \sum_{i=1}^{N} f(x_{i,\min})\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{2(i-1)}{N}\right)\frac{2}{N}\,.$$

Schreiben Sie Funktionen `so` und `su`, die als Eingabe den Wert N erhalten und $S_O(N)$ und $S_U(N)$ berechnen und zurückgeben; plotten Sie diese Werte für $N = 10, 10^2, 10^3, 10^4$; lesen Sie am Plot den Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} S_O(N) = \lim_{N\to\infty} S_U(N) = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

ab; überprüfen Sie, dass Sie dasselbe Ergebnis durch Rechnung aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung erhalten, indem Sie benutzen, dass $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ eine Stammfunktion von f ist.