

# Mathematik I

## für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 13 (Abgabe am 23.01.2008)

---

### Aufgabe 56

(10 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung von  $x \mapsto \arctan x$ .

HINWEISE: Denken Sie an die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion (Vorlesung 10 vom 19.12.07). Aus Aufgabe 49 wissen Sie außerdem, dass  $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ .

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

### Aufgabe 57

(10 Punkte)

Die Zufallsvariable  $X \in [0, \infty)$  sei exponentialverteilt, mit Dichte

$$f(x) = ae^{-5x}.$$

Welchen Wert hat  $a$ ? Welches ist der wahrscheinlichste Wert für  $X$ ? Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $X$ .

HINWEISE: Es muß gelten, dass  $\int_0^\infty f(x)dx = 1$  (Normierung). Wie Sie sich leicht überzeugen, gilt  $((1+bx)e^{-bx})' = -b^2xe^{-bx}$ .

### Aufgabe 58

(10 Punkte)

Bei einem Federpendel (Gewicht mit Masse  $m$  hängt an einer Feder mit Härte  $\gamma$ ) wirkt nach dem Hookschen Gesetz eine Rückstellkraft  $K$ , deren Betrag der Auslenkung  $s$  aus der Ruhelage proportional ist,  $K = -\gamma s$ . Sei  $s(t)$  die Auslenkung zur Zeit  $t$ . Machen Sie sich klar, dass  $s$  die Differenzialgleichung (*harmonische Schwingungsgleichung*)

$$\ddot{s}(t) = -\omega^2 s(t)$$

erfüllt. (Verwenden Sie dazu, dass nach Newton *Kraft = Masse mal Beschleunigung* gilt.) Drücken Sie  $\omega$  durch  $\gamma$  und  $m$  aus. Zeigen Sie, dass die harmonische Schwingung  $s(t) = c \sin(\omega t + \phi)$ , mit beliebigen Konstanten  $c, \phi \in \mathbb{R}$ , die Differenzialgleichung erfüllt.

### Aufgabe 59

(10 Punkte)

Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$U(x, y, z) = xy^2z^3 + ze^{x/y} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$