Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 14 (Abgabe am 30.01.2008)

Aufgabe 60 (10 Zusatzpunkte)
Seien $w_1, \ldots, w_n$ fehlerbehaftete Messwerte, die wir zu einem Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ zusammenfassen, und nehmen wir an, dass aufgrund von Naturgesetzen der Vektor $W = (W_1, \ldots, W_n)$ der wahren Werte auf der Geraden $G = \{u + \alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ für bestimmte $u, v \in \mathbb{R}^n$ liegen muss. Bestimmen Sie denjenigen Punkt x auf G, der dem w am nächsten liegt. Anleitung: Schreiben Sie $x = u + \alpha v$ und bestimmen Sie dasjenige α, das $D(\alpha) = d(x, w)$ minimiert. Die Rechnung lässt sich vereinfachen, indem man statt $D(\alpha)$ die Funktion $f(\alpha) = d(x, w)^2$ minimiert, was auf dasselbe α führt (begründen Sie warum).

Berechnen Sie nun auch für das Beispiel, $n = 2$, $w = (1, 2)$, $u = (0, 0)$, $v = (1, 1)$, das minimierende α und fertigen Sie eine Skizze an, in der Sie das minimale $d(x, w)$ einzeichen.

Aufgabe 61 (Populationsmodell von Malthus) (10 Punkte)
Sei $N(t)$ die Anzahl Individuen (in Millionen) einer Tierpopulation zur Zeit t. Seien die (pro Kopf-) Geburtenrate $g > 0$ und die Sterberate $s > 0$ Konstanten. Dann gilt

$$\frac{dN}{dt} = gN - sN\,.$$

Zeigen Sie: Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet $N(t) = e^{(g-s)t}N(0)$ (exponentielles Wachstum), mit beliebigem $N(0)$. Die Größe $g - s$ heißt auch *Wachstumsrate*. (Vergleichen Sie auch mit Aufgabe 19!)

Aufgabe 62 (Lineare Regression am Beispiel von Grillen) (10 Punkte)
Durch ihren Flügelschlag produzieren Grillen das charakteristische Zirpen. Je schneller eine Grille ihre Flügel aufeinander schlägt, desto höher ist das Zirpen, dabei bewegen Grillen ihre Flügel bei höheren Umgebungstemperaturen schneller als bei niedrigen. Finden Sie den (hier als linear angenommen) Zusammenhang zwischen Zirpfrequenz f_Z und der Lufttemperatur T anhand der Meßwerte im Datensatz `grille.dat` (Dieser kann von der Webseite zur Vorlesung heruntergeladen werden.). Gehen Sie dabei wie folgt vor: Laden Sie den Datensatz `grille.dat` in Matlab;[8] dieser enthält in der ersten Spalte die Zirpfrequenz (1/s), in der zweiten Spalte die gemessene Temperatur T (in Fahrenheit). Stellen Sie die Meßwerte als Punkte in einem Diagramm dar. Lineare Regression läßt sich in Matlab durch den Befehl `p = polyfit(x,y,1)` durchführen; dabei sind `x,y` Vektoren mit den Stützpunkten (bzw. Meßwerten), und `p = (p1,p2)` enthält die zu berechnenden Parameter p_1, p_2 der Gleichung $y = p_1 x + p_2$. Finden Sie p_1, p_2 und plotten sie die *Ausgleichsgerade* in dasselbe Diagramm.

[8]Speichern Sie die Datei `grille.dat` in dem Verzeichnis, in dem Sie auch Ihre `.m`-Dateien ablegen. Unter Matlab laden Sie die Datei mit `load grille.dat`. Dies erzeugt eine Matrix `grille`, deren Spalten die Meßwerte in angegebener Reihenfolge enthalten. Die erste Spalte von `grille` als Datenvektor erhalten Sie durch den Befehl `grille(:,1)`.

Aufgabe 63 (10 Zusatzpunkte)

a) Die lineare Regression betrachtet die x-Werte als exakt und nähert die y-Werte an. Sind die x-Werte selbst nicht verlässlich, so ist es ratsam, die beiden Variablen mal die Rollen tauschen zu lassen. Vertauschen Sie in Aufgabe **62** die beiden Spalten, führen Sie lineare Regression durch, vertauschen nochmals die Variablen (um wieder f_Z nach rechts und T nach oben abzutragen), und plotten Sie beide Ausgleichsgeraden in ein gemeinsames Diagramm.

b) Gehen Sie nun davon aus, dass die berechneten Parameter p_1 und p_2 jeweils mit einem Fehler von 10% behaftet sind, d.h., dass für die Parameter q_1, q_2 der wahren Gerade gilt $q_i \in [p_i - \Delta p_i, p_i + \Delta p_i]$ mit $\Delta p_i = p_i/10$, $i = 1, 2$. Stellen Sie wie im Plot von **C26** weitere 100 Geraden dar mit anderen Parametern im Rahmen der Ungenauigkeit. Nutzen Sie dazu folgenden Matlab-Code:

```
» p1 = [    ]; errechneter p1-Wert
» p2 = [    ]; errechneter p2-Wert
» dp1 = p1/10; dp2 = p2/10;
» r = 0:.1:1; phi = 0:2*pi/10:2*pi;
» [R,Phi] = meshgrid(r,phi);
» q1 = p1 + dp1*R.*cos(Phi);
» q2 = p2 + dp2*R.*sin(Phi);
» x= 14:0.1:21; Meßwerte-Bereich
» for i =1:1:length(r)
for j = 1:1:length(phi)
y((i-1)*length(phi)+j,:) = q1(i,j)*x+q2(i,j);
end
end
» for i=1:1:100
plot(x,y(i,:),':r'); hold on
end
```

Die Felder $\boxed{}$ müssen Sie noch ausfüllen.

c) Teil b) hat Ihnen einen Eindruck gegeben, wie sich Ungenauigkeiten in den Parametern auswirken: die Geraden innerhalb der Ungenauigkeit füllen einen gewissen Streifen aus. So, wie man bei Punkten in einem Scatter-Plot Fehlerbalken einzeichnet, zeichnet man bei Regressionsgeraden zur Veranschaulichung der Ungenauigkeit gern die Ränder dieses Streifens ein. Plotten Sie dazu die *Einhüllenden* $f_\pm$ der in Teil b) gezeichneten Geraden, die den Gleichungen

$$f_\pm(x) = p_1 x + p_2 \pm \sqrt{\Delta p_1^2 x^2 + \Delta p_2^2}$$

genügen, andersfarbig in dasselbe Diagramm.