

# Mathematik I

## für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 15 (keine Abgabe, Besprechung in den Übungsgruppen am 11.–14.02.08)

---

### Aufgabe 64 (Logistisches Populationsmodell)

Die Wachstumsrate einer Population ist realistischerweise von der Populationsgröße  $N$  selbst abhängig (in Aufgabe 61 war sie das nicht), in so einer Weise, dass eine zu große Population nicht mehr weiter wächst (z.B. wegen Nahrungsmangel). Verhulst (1836) schlug als konkretes Modell die Wachstumsrate  $r(1 - N/K)$  mit positiven Konstanten  $r, K$  vor. In Aufgabe 27 haben wir eine zeitlich diskrete Version dieses Modells untersucht, hier untersuchen wir das entsprechende kontinuierliche Modell, die *logistische Differenzialgleichung*

$$\frac{dN}{dt} = f(N) = rN(1 - N/K). \quad (1)$$

Bestimmen Sie die *stationären Zustände*  $\tilde{N}_i$ , also diejenigen Werte von  $N$ , bei denen  $dN/dt = 0$  ist.

Einige dieser stationären Zustände sind stabil, andere instabil. Um das Verhalten in der Nähe jedes  $\tilde{N}_i$  zu untersuchen, ersetzen wir (1) durch die *linearisierten Differenzialgleichungen*

$$\frac{dN}{dt} = T_i(N) = f(\tilde{N}_i) + (N - \tilde{N}_i)f'(\tilde{N}_i), \quad (2)$$

bei der wir also die Funktion  $f$  durch ihre Tangente  $T_i$  in  $\tilde{N}_i$  ersetzt haben. Von der linearisierten Gleichung können wir erwarten, dass sie  $N(t)$  näherungsweise richtig wiedergibt, solange die Lösung  $N(t)$  von (1) sich in der Nähe von  $\tilde{N}_i$  aufhält. Bestimmen Sie die Lösungen von (2) für jedes der  $\tilde{N}_i$  (hier hilft ein Blick auf Aufgabe 61), und beschreiben Sie in Worten, wie sich die Lösungen von (1) in der Nähe der  $\tilde{N}_i$  verhalten.

### Aufgabe 65 (Populationsmodell von Lotka und Volterra)

Wir simulieren die Entwicklung zweier Tier-Populationen  $N$  (Beute) und  $P$  (Räuber) als Funktion der Zeit  $t$ .  $N(t), P(t)$  sind die Anzahlen der jeweiligen Individuen (in Millionen) zum Zeitpunkt  $t$ . Lotka und Volterra schlugen unabhängig voneinander folgende gekoppelten Differentialgleichungen als Modell der zeitlichen Entwicklung vor:

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP), \quad \frac{dP}{dt} = P(cN - d). \quad (\text{A})$$

Dabei sind  $a, b, c, d$  positive Konstanten. Das Modell (A) beruht auf folgenden Annahmen: Pro Beutetier und Zeiteinheit ist die Anzahl der Geburten minus natürliche Todesfälle durch  $a$  gegeben, während die Anzahl  $bP$  der Todesfälle durch Gefressenwerden proportional ist zur Anzahl der Raubtiere  $P$ . Pro Raubtier und Zeiteinheit vermehren sich die Raubtiere um  $cN - d$ ; dieser Betrag wächst mit der verfügbaren Nahrung und würde in Abwesenheit jeglicher Beute  $-d$  betragen.

Stellen Sie  $N$  und  $P$  als Funktion der Zeit ( $t \in [0, 50]$ ) in einem Diagramm graphisch dar mit  $a = 0.5, b = 0.2, c = 0.3, d = 0.6$  für die drei verschiedenen Anfangswerte  $(N(0), P(0)) = (1, 0.5), (3, 0.5)$  und  $(3, 2)$ . Gehen Sie dazu wie im untenstehenden Beispiel vor. Dabei verwenden wir einen speziellen Matlab-Befehl zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen, einen sogenannten *Integrator* oder *solver*.

Plotten Sie außerdem für jeden der 3 genannten Anfangswerte die so errechneten Wertepaare  $(N(t), P(t))$  in ein weiteres Diagramm, das die *Bahn* des Verlaufs in der  $NP$ -Ebene (dem sogenannten *Zustands-* oder *Phasenraum*) zeigt. (Im untenstehenden Beispiel würde der entsprechende Befehl `plot(y(:,1),y(:,2))` lauten.)

---

*Beispiel 17:* Zu lösen seien die gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{dy_1}{dt} = -\beta y_1 + y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\omega^2 y_1, \quad (\text{B})$$

mit bestimmten Koeffizienten  $\beta$  und  $\omega$ ,  $y_1(0) = 1$  und  $y_2(0) = .5$ . Wir schreiben nun eine Funktion `pendel`, die diese Differentialgleichung enthält und speichern sie unter `pendel.m` ab:

```
function [dy]=pendel(t,y)
dy=zeros(2,1);
omega=2;
beta=0.1;
dy(1)=y(2)-beta*y(1);
dy(2)=-omega^2*y(1);
end
```

Anschließend gibt man folgende Befehle direkt ein:

```
> t=0:.1:50;
> y0=[1; .5];
> [t,y]=ode45('pendel',t,y0);
> plot(t,y);
```

`ode45('pendel',t,y0)` berechnet die Lösungen  $y_i$  von (B) numerisch. Die Ausgabe erfolgt in Form einer Matrix  $y$ , deren  $i$ -te Spalte die Funktionswerte von  $y_i(t)$  im Intervall  $[0, 50]$  enthält.