Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Der Logarithmus

Stefan Keppeler

14. November 2007

Eberhard Karls Universität Tübingen

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, d.h.

$$y = \log x$$

ist die eindeutige Lösung der Gleichung $e^y = x$ zu gegebenem $x > 0$.

Wann besitzt eine Funktion $f : A \to B$ eine Umkehrfunktion?

Definition: Eine Funktion $f : A \to B$ heißt injektiv, wenn die Bilder verschiedener Elemente stets verschieden sind, d.h.

$$f(x) \neq f(y) \quad \text{für} \quad x \neq y\,.$$

Wenn f nicht injektiv ist, dann besitzt die Gleichung $f(x) = b$ für manche b mehrere Lösungen x. Wenn f injektiv ist, dann besitzt sie genau eine Lösung, genannt $x = f^{-1}(b)$, für jedes $b \in f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$.

Definition: Die so definierte Funktion $f^{-1} : f(A) \to A$ heißt die Umkehrfunktion von f und erfüllt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$

Beispiel:

Die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$.

Ebenso ist $x \mapsto -\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion von $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Beachte:

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

Definition:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt
– streng monoton wachsend, wenn $f(x) < f(y)$ für $x < y$,
– streng monoton fallend, wenn $f(x) > f(y)$ für $x < y$,
– monoton wachsend, wenn $f(x) \leq f(y)$ für $x < y$ und
– monoton fallend, wenn $f(x) \geq f(y)$ für $x < y$.

Beispiele:

- $\exp$ ist streng monoton wachsend
- $f = const$ ist monoton wachsend und fallend, aber nicht streng
- $x \mapsto x^\alpha$ auf dem Definitionsbereich $D = [0, \infty)$ ist streng monoton wachsend für $\alpha > 0$ und fallend für $\alpha < 0$.

Satz:

Streng monotone Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ sind injektiv.

Beweis: Sei f streng wachsend, und seien $x, y \in D$ mit $x \neq y$. Dann gilt entweder $x < y$ oder $x > y$. Falls $x < y$, gilt $f(x) < f(y)$, daher $f(x) \neq f(y)$. Falls $x > y$, gilt $f(x) > f(y)$, daher $f(x) \neq f(y)$. Analog für streng fallende Funktionen. □

Folgerung: Da $\exp$ streng wachsend ist und $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$, existiert auf $D = \mathbb{R}^+$ die Umkehrfunktion, genannt $\log$ oder $\ln$ (logarithmus naturalis).

Rechenregeln für den Logarithmus: siehe Übungsaufgabe.

Beispiel:

Die Halbwertszeit $t_{1/2}$ einer radioaktiven Substanz ist die Zeit, in der die Aktivität (Anzahl Zerfälle pro Minute) oder auch die vorhandene Menge auf die Hälfte zurückgeht, also $e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \qquad -\lambda t_{1/2} = \log(1/2) = -\log 2$$

$$\Leftrightarrow \qquad t_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda} \qquad \text{oder} \qquad \lambda = \frac{\log 2}{t_{1/2}}$$

Logarithmische Skalenteilung:

Trage auf einer Skala nicht die interessante Größe x selbst sondern $\log x$ auf.[1]

- Allgemein: Stelle Variable über mehrere Größenordnungen dar.
- Erwarte exponentiellen Zusammenhang,
  $$y = c\,e^{\lambda x} \text{ mit Konstanten } c, \lambda \in \mathbb{R},$$
  y-Achse logarithmisch $\rightsquigarrow$ Gerade, denn
  $$\log y = \log c + \lambda x.$$
- Erwarte Potenzgesetz, $y = c\,x^\alpha$ mit Konstanten $c, \alpha \in \mathbb{R}$, beide Achsen logarithmisch $\rightsquigarrow$ Gerade, denn
  $$\log y = \log c + \alpha \log x.$$

[1] Oft schreibt man dennoch x an die Achse, teilt sie aber logarithmisch ein.

Für $\alpha > 0$ besitzt auch die Gleichung $\alpha^y = x$ mit gegebenem $x > 0$ eine eindeutige Lösung $y = \log_\alpha x$, genannt Logarithmus von x zur Basis α.

Beliebte Basen außer e sind

- 2 ("binärer Logarithmus", lb) und
- 10 ("dekadischer Logarithmus", lg).

Aus den Potenzrechenregeln folgt

$$\log_\alpha x = \frac{\log(x)}{\log(\alpha)},$$

denn

$$\alpha^{\log_\alpha x} = \alpha^{\frac{\log(x)}{\log(\alpha)}} = \left(e^{\log(\alpha)}\right)^{\frac{\log(x)}{\log(\alpha)}} = e^{\log(\alpha)\frac{\log(x)}{\log(\alpha)}} = e^{\log(x)} = x\,.$$

Der pH-Wert (lat. pondus Hydrogenii = Gewicht des Wasserstoffs) ist ein Maß für die Säure einer Flüssigkeit und gibt die Konzentration der Wasserstoff-Ionen logarithmisch an,

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}(\rho)\,.$$

Hierbei ist ρ, grob gesagt,[2] die Konzentration der Protonen H^+.

Wein ($\mathrm{pH} \approx 4$) hat also die 1000-fache Protonenkonzentration von Wasser ($\mathrm{pH} = 7$). Seife ($9 \leq \mathrm{pH} \leq 10$) entsprechend $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{1000}$ der H_3O^+-Konzentration von Wasser.

[2] genauer gesagt, der Quotient aus der Aktivität der Oxoniumionen H_3O^+ zur Aktivität von H_2O