Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Vektoren

Stefan Keppeler

21. November 2007

Eberhard Karls Universität Tübingen

Vektoren
- Definition
- Betrag und Summen
- Beispiele
- Rechenregeln – Addition
- Rechenregeln – Skalare Multiplikation

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Vektoren werden zur Darstellung gerichteter Größen verwendet.

Man stelle sich also einen Pfeil in eine bestimmte Richtung mit einer bestimmte Länge (Betrag) vor.

Zum Rechnen: Darstellung durch Komponenten in kartesischen Koordinaten,

$$u \in \mathbb{R}^n , \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} , \quad u_i \in \mathbb{R} \quad \text{(Spaltenvektor)}$$

$\ldots$oder Zeilenvektor: $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

Notation: oft $\vec{u}$ oder $\boldsymbol{u}$ statt u für Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Definition: Der Betrag oder die Norm eines Vektors $u = (u_1, \ldots, u_n)$ ist

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

(stimmt überein mit dem Abstand des Punktes mit Koordinaten $u_1, u_, \ldots, u_n$ vom Ursprung.)

Definition: Die Summe zweier Vektoren $u = (u_1, \ldots, u_n)$ und $v = (v_1, \ldots, v_n)$ im $\mathbb{R}^n$ ist komponentenweise erklärt,

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

Geometrische Bedeutung: Parallelogrammaddition

- **Geschwindigkeiten** addieren sich vektoriell, z.B. gehende Person auf Schiff.
- **Translationen** addieren sich vektoriell, z.B. Fahrt von Tübingen nach Ulm, via Stuttgart
- Mittelung von **Richtungen**: Himmelsrichtung, repräsentiert durch einen Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = 1$, in die ein Zugvogel morgens losfliegt.
  Mittelung der Winkel? Oder über Vektoraddition?

$$\overline{u} = \frac{1}{N}(u(1) + \ldots + u(N))$$

- **Addition von Kräften:** Elektrisch geladene Teilchen (z.B. Elektronen, Ionen, Staubkörner), nummeriert von 1 bis N.

  Kraft auf Teilchen Nr. i:

  $$K_i = \sum_{j=1}^{N} K_{ij} \quad \text{(Vektorsumme)}$$

  K_{ij}: Kraft, die Teilchen Nr. j auf Teilchen Nr. i ausübt (elektrostatische Anziehungs- oder Abstoßungskraft). Zeigt nach Coulombschen Gesetz in Richtung der Verbindungslinie zwischen den Teilchen i und j; Betrag

  $$\|K_{ij}\| = \frac{q_i q_j}{d(x_i, x_j)^2}\,,$$

  wobei $q_i \in \mathbb{R}$ die Ladung und $x_i \in \mathbb{R}^3$ die Position von Teilchen i ist.

Rechenregeln:

- $u + v = v + u$ (Kommutativität)
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assoziativität)
- $u + 0 = u$ für $0 = (0, \ldots, 0)$ (Existenz eines neutralen Elements, “Nullvektor”)
- $u + (-u) = 0$ für $-(u_1, \ldots, u_n) = (-u_1, \ldots, -u_n)$ (Existenz von additiv-inversen Elementen, “das Negative von u”)

Beispiele:

- Das Negative $-u$ eines Geschwindigkeitsvektors entspricht der Bewegung in die entgegengesetzte Richtung mit (betragsmäßig) gleicher Geschwindigkeit.
- Eine Punktspiegelung am Ursprung bildet jeden Vektor auf sein Negatives ab.

Definition: Das α-fache eines Vektors $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert als der Vektor

$$\alpha u = (\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n)\,.$$

Die so definierte Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Skalarmultiplikation.

Beispiele:

- Zentrische Streckung um Faktor $\alpha > 0$ bildet jeden Punkt/Vektor auf sein α-faches ab.
- Kraft $=$ (Masse) (Beschleunigung).
- $u \neq 0$ und αu für $\alpha > 0$ zeigen in dieselbe Richtung, $u \| \alpha u$.
- Falls $u \| v$, dann $\exists\ \alpha > 0$ mit $v = \alpha u$
- Richtung von $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, gegeben durch Einheitsvektor

$$e = \frac{u}{\|u\|}$$

  (gleiche Richtung wie u aber Betrag 1)

Rechenregeln: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Skalare), $u, v \in \mathbb{R}^n$ (Vektoren)

- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (zwei Distributivgesetze)
- $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ (Assoziativität)
- $1u = u$ (neutrales Element der Multiplikation)
- $(-1)u = -u$
- $0u = 0$.

Beachte: Man multipliziert hier einen Vektor mit einem Skalar, nicht mit einem anderen Vektor! Man kann durch einen Skalar $\alpha \neq 0$ dividieren (indem man mit α^{-1} multipliziert), aber man kann nicht durch einen Vektor dividieren!