Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Matrizen

Stefan Keppeler

28. November 2007

Eberhard Karls Universität Tübingen

Eberhard Karls Universität Tübingen

Definition: Eine $n \times m$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist ein Rechteck-Schema aus Zahlen a_{ij} in n Zeilen und m Spalten, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Die Menge aller $n \times m$-Matrizen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(n, m)$.

Die Summe $A + B$ zweier $n \times m$-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ ist die $n \times m$-Matrix mit den Einträgen $a_{ij} + b_{ij}$.

Das Produkt AB einer $n \times m$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit einer $m \times \ell$-Matrix $B = (b_{rs})$ ist die $n \times \ell$-Matrix $C = (c_{is})$ mit den Einträgen (Komponenten)

$$c_{is} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{js}.$$

Eberhard Karls Universität Tübingen

Definition: Die Transponierte A^T einer $n \times m$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist die $m \times n$-Matrix mit den Einträgen a_{ji}.

A heißt symmetrisch, wenn $A^T = A$.

Bemerkung: Vektoren lassen sich als Matrizen auffassen; man muss sich nur festlegen, ob sie

Spaltenvektoren (und damit $n \times 1$-Matrizen) oder
Zeilenvektoren (und damit $1 \times n$-Matrizen) sind.

Sei $A \in \mathcal{M}(n, m)$ und $x \in \mathbb{R}^m$, aufgefasst als Spaltenvektor $x \in \mathcal{M}(m, 1)$. Dann ist

$$Ax \in \mathcal{M}(n, 1) \qquad \text{ein Spaltenvektor,}$$

für den wir einfach schreiben $Ax \in \mathbb{R}^n$, genannt "A angewandt auf den Vektor x".

Anwendung: Markow-Prozess in diskreter Zeit

- Individuum einer Gesamtheit im Zustand j

  $\longrightarrow$ Zeitschritt $\longrightarrow$

  Wahrscheinlichkeit w_{ij}, für Übergang in den Zustand i
- n mögliche Zustände: Zahlen $w_{ij} \in [0,1]$ bilden $n \times n$-Matrix, die Übergangsmatrix W des Markow-Prozesses.
- Zeitpunkt $t = 0$: $N_j^{(0)}$ Individuen im Zustand j

  Populationsvektor: $N^{(0)} = (N_1^{(0)}, \dots, N_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$
- Zeitpunkt $t = 1$: näherungsweise für große $N_j^{(0)}$

$$N_j^{(1)} = w_{j1} N_1^{(0)} + w_{j2} N_2^{(0)} + \dots w_{jn} N_n^{(0)}$$

kurz

$$N^{(t+1)} = W N^{(t)}.$$

Beispiel: Tübingen hat 84.000 Einwohner, Reutlingen 112.000. Wenn jedes Jahr 5% der Einwohner Tübingens nach Reutlingen umzögen und 10% der Einwohner Reutlingens nach Tübingen (keine sonstigen Umzüge, keine Geburten oder Todesfälle), gilt

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 84.000 \\ 112.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91.000 \\ 105.000 \end{pmatrix}.$$

Folgejahr (gleiche Übergangswahrscheinlichkeiten):

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 91.000 \\ 105.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96.950 \\ 99.050 \end{pmatrix}.$$

Gleichgewichtslage oder stationäre Verteilung falls $WN = N$, d.h. gleich viele Umzüge in jeder Richtung:

$$0{,}05\, N_1 = 0{,}1\, N_2 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2N_2$$

Wegen $N_1 + N_2 = 196.000$, folgt $N_1 = 130.667$ und $N_2 = 65.333$.

Anwendung: Leslie-Populationsmodell
(Verallgemeinerung des Markow-Prozesses)

- Jedes Individuum einer Gesamtheit befindet sich zu einem Zeitpunkt in einem von n Zuständen.
- Ein Individuum im Zustand j erzeugt im Mittel ℓ_{ij} Individuen im nächsten Schritt im Zustand i; diese Werte bilden die Leslie-Matrix $L = (\ell_{ij}) \in \mathcal{M}(n,n)$.
- $N^{(t)} = (N_1^{(t)}, \ldots, N_n^{(t)})$: Populationsvektor zur Zeit t, dann ist im Mittel (und für große Besetzungszahlen näherungsweise)
$$N^{(t+1)} = LN^{(t)}.$$

Beispiel: Fibonacci-Hasen

Beispiel: Gesamtheit = Population, Zustand i = Alter in Jahren $\in \{0, \ldots, n\}$. Ein Individuum von j Jahren setzt im Mittel ν_j Nachkommen (vom Alter 0) in die Welt und geht außerdem selbst in den Zustand $i+1$ über, wenn es nicht stirbt. Ein Individuum von j Jahren überlebt noch mindestens ein Jahr mit Wahrscheinlichkeit $s_j \in [0,1], s_n = 0$. Also

$$N_0^{(t+1)} = \sum_{j=0}^{n} \nu_j N_j^{(t)}$$

und

$$N_i^{(t+1)} = s_{i-1} N_{i-1}^{(t)}$$

für $1 \leq i \leq n$.

$$L = \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n \\ s_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Eberhard Karls Universität Tübingen

Anwendung: Die Drehung der Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung um den Winkel φ (gegen den Uhrzeigersinn) entspricht in Koordinaten der Anwendung der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Rechenregeln Addition: Seien $A, B, C \in \mathcal{M}(n, m)$. Dann gilt

- $A + B = B + A$ (Kommutativität)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativität)
- $A + 0 = A$ mit der "Nullmatrix" 0, die als Einträge lauter Nullen hat (neutrales Element der Addition)
- $A + (-A) = 0$ mit $-A = (-a_{ij})$ (Existenz von additiv-inversen [negativen] Elementen).

Rechenregeln Multiplikation: Seien $A \in \mathcal{M}(n,m), B \in \mathcal{M}(m,\ell)$ und $C \in \mathcal{M}(\ell,k)$.

- Kommutativität gilt i.A. nicht! (Beispiel Übungsaufgabe), d.h. i.A. $AB \neq BA$
- $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativität)
- $A0 = 0 = 0A$
- $AI = A = IA$ mit der Einheitsmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

($I =$ neutrales Element der Multiplikation).

Einträge mit dem Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

also $I = (\delta_{ij})$.

- Für manche, aber nicht für alle $A \in \mathcal{M}(n,n)$ mit $A \neq 0$ existiert eine inverse Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}\,.$$

  Solche A heißen invertierbar.

- Ist A invertierbar, dann ist die Inverse eindeutig, d.h., wenn $B, C \in \mathcal{M}(n,n)$ mit

$$BA = I = AB \quad \text{und} \quad CA = I = AC$$

  dann folgt $B = C$.

- Ein Beispiel für eine nicht-invertierbare Matrix $A \neq 0$ ist die Matrix aus der Übungsaufgabe mit $A^2 = 0$.

Rechenregeln Addition und Multiplikation:

- $(A+B)C = AC + BC$

  für $A, B \in \mathcal{M}(n,m)$ und $C \in \mathcal{M}(m,\ell)$,

- $A(B+C) = AB + AC$

  für $A \in \mathcal{M}(n,m)$ und $B, C \in \mathcal{M}(m,\ell)$. (Distributivgesetze)

- $A(-B) = (-A)B = -(AB)$.

Anwendung der Assoziativität: Aus

$$N^{(t+1)} = LN^{(t)}$$

für Markow-Prozesse und Leslie-Modelle folgt

$$\begin{aligned} N^{(t)} &= L(L(L(\cdots(LN^{(0)})\cdots))) \\ &= (\cdots((LL)L)\cdots)L)N^{(0)} = L^t N^{(0)}, \end{aligned}$$

wobei Potenzen von Matrizen $L^t = LLL\cdots L$ (mit t Faktoren) nur für $L \in \mathcal{M}(n,n)$ und i.A. nur für Exponenten $t \in \mathbb{N}_0$ definiert sind – bei invertierbaren Matrizen auch für $t \in \mathbb{Z}$.

Potenzrechenregeln:

- $A^n A^m = A^{n+m}$
- $A^1 = A$
- $A^0 = I$ für $A \neq 0$
- $(A^n)^m = A^{nm}$

Vorsicht: i.A. $(AB)^n \neq A^n B^n$, denn z.B.

$$(AB)^2 = ABAB \neq AABB = A^2 B^2 \,.$$