Lineare Gleichungssysteme

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Stefan Keppeler

5. Dezember 2007

Eberhard Karls Universität Tübingen

Definition: Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist ein System von n Gleichungen der Form

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_m$ und
bekannten Koeffizienten a_{ij} und b_i.

- Äquivalent kann man schreiben $Ax = b$, wobei $x \in \mathbb{R}^m$ gesucht ist, und $A \in \mathcal{M}(n, m)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben sind.
- Das Gleichungssystem heißt homogen, falls $b = 0$, sonst inhomogen.
- Die Lösungsmenge ist

$$L_b = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = b\}.$$

Beispiel: Tomographie

- Transmissionskoeffizienten (2D)

α_{11}	α_{12}
α_{21}	α_{22}

- Schattenbild ergibt Gesamttransmission
  $\lambda_1 = \alpha_{11}\alpha_{12}, \quad \lambda_2 = \alpha_{21}\alpha_{22},$
  $\mu_1 = \alpha_{11}\alpha_{21}, \quad \mu_2 = \alpha_{12}\alpha_{22}.$
- Logarithmieren, $\log\lambda_1 = \log\alpha_{11} + \log\alpha_{12}$ etc., führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log\alpha_{11} \\ \log\alpha_{12} \\ \log\alpha_{21} \\ \log\alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log\lambda_1 \\ \log\lambda_2 \\ \log\mu_1 \\ \log\mu_2 \end{pmatrix}$$

Lösung durch Eliminationsverfahren / Gauß-Algorithmus.
Füge Daten A und b zur einer $n \times (m+1)$-Matrix $B = (A|b)$ zusammen. Erlaubte Operationen:

1. Vertauschen zweier Zeilen von B.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

2. Vervielfachung einer Zeile von B mit Faktor $\alpha \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 2 \\ \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

3. Addition des α-fachen einer Zeile von B zu einer anderen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} -4 \\ + \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

Eberhard Karls Universität Tübingen

Anwendung am folgenden LGS

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 16 \qquad (1)$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 14 \qquad (2)$$
$$-5x_1 - 5x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 - \tfrac{11}{3}x_4 = -\tfrac{23}{3} \qquad (3)$$

kompakt geschrieben:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -{}^{2}\!/_{3} & -{}^{11}\!/_{3} & -{}^{23}\!/_{3} \end{array}\right)$$

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccc|c}
4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\
2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\
-5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \mid -1/4 \\ \\ \\ \end{array}
\\ \hline
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\
2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\
-5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3
\end{array}\right)
\begin{array}{l} -2 \quad 5 \\ + \\ + \end{array}
\\ \hline
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\
0 & 0 & 3/2 & -3 & 6 \\
0 & 0 & 37/12 & -37/6 & -37/3
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \mid \cdot 2/3 \\ \mid \cdot 12/37 \end{array}
\\ \hline
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 4
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ -1 \\ + \end{array}
\\ \hline
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

LGS ist nun auf Zeilenstufenform,
allgemein: ($*$ heißt “kann $\neq 0$ sein”)

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0\cdots 0 & 1 & *\cdots & * & * & & * & * & * & * \\
 & & & 1 & *\cdots & & * & * & * & * \\
 & & & & & & 1 & *\cdots & * & * \\
 & & & & & & & & 0\cdots 0 & * \\
 & & & & & & & & 0\cdots 0 & * \\
 & & & & & & & & 0\cdots 0 & *
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Diesem Schema entsprechen die umgeformten Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \tfrac{3}{4}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 &= 4 \\ x_3 - 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

- Auflösen nach x_1 und x_3:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - x_2 - \tfrac{3}{4}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_3 &= 4 + 2x_4 \end{aligned}$$

- Wähle $x_2 = s \in \mathbb{R}$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$ beliebig $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - s - t \\ x_3 &= 4 + 2t \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Anders gesagt, die Lösungsmenge ist

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definition:
Der von den Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte Unterraum ist die Menge

$$\langle u^{(1)}, \ldots, u^{(k)} \rangle := \{\alpha_1 u^{(1)} + \ldots + \alpha_k u^{(k)} \,|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

- $\alpha_1 u^{(1)} + \ldots + \alpha_k u^{(k)}$ heißt Linearkombinationen (LK) der Vektoren $u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}$.
- Unterräume heißen auch Teilräume oder lineare Teilräume.
- Im Fall $k = 0$ setzen wir $\langle\rangle = \{0\}$.

Satz: Die Lösungsmenge $L_0 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0\}$ eines homogenen linearen Gleichungssystems ist stets ein Teilraum.

Satz: Ist $u \in \mathbb{R}^m$ irgendeine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$, ist also $Au = b$, dann ist die Lösungsmenge $L_b = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = b\}$ gegeben durch

$$L_b = u + L_0 := \{u + y \mid y \in L_0\}.$$

Beachte: L_b kann leer sein, obwohl L_0 nie leer ist.

Bemerkung: Mengen der Form $u + L_0$, wobei L_0 ein Unterraum ist, heißen auch affine Teilräume. Sie entstehen aus (linearen) Teilräumen durch Translation.

- Anton und Berta sind Geschwister
- Anton hat doppelt so viele Schwestern wie Brüder
- Berta hat gleich viele Schwestern wie Brüder

Wieviele Kinder gibt es in der Familie?