Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Differenzialrechnung

Stefan Keppeler

19. Dezember 2007

Definition: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^m$ hat den Grenzwert λ im Punkt b,

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lambda,$$

wenn für jede Folge b_n in D mit $b_n \to b$ gilt, dass $f(b_n) \to \lambda$.

Beachte:

- b muss nicht in D liegen, d.h. $f(b)$ ist möglicherweise nicht definiert, und das ist tatsächlich der Hauptanwendungsfall.
- Nicht jede Funktion hat in jedem Punkt einen Grenzwert (Gegenbeispiel Heaviside-Funktion in 0).
- Falls $b \in D$, dann gilt: f ist stetig in $b \Leftrightarrow \lim_{x \to b} f(x) = f(b)$.

Definition: Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ heißt differenzierbar im Punkt $x \in [a, b]$, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Dieser Wert heißt der Differenzialquotient oder die (erste) Ableitung von f in x.

- Ist f auf dem gesamten Definitionsbereich $D = [a, b]$ differenzierbar, so heißt die dadurch definierte Funktion $f' : D \to \mathbb{R}^d$ die (erste) Ableitung von f.
- Ist f' wiederum auf ganz D differenzierbar, so heißt die Ableitung von f' die zweite Ableitung von f, f''.
- Ist f'' auch auf ganz D differenzierbar, so heißt die Ableitung von f'' die dritte Ableitung von f, f''', und so weiter.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **Tangente in x:**

$$T(u) = f(x) + f'(x)(u - x)$$

Tangente T als Näherungsfunktion für f in der Nähe von x.

Anwendung: Größtfehlerabschätzung

- gemessen: x mit Ungenauigkeit δx
- gesucht: Wert der Größe $y = f(x)$ mit Ungenauigkeit δy
- näherungsweise: $\delta y = |f'(x)|\, \delta x$.

Beispiel:

Punktförmiges Objekt befinde sich zur Zeit t am Ort $f(t) \in \mathbb{R}^3$

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ heißt Kurve im $\mathbb{R}^d$
- mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[a, b]$

$$\overline{v} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- (Momentan-)Geschwindigkeit zur Zeit $t \in [a, b]$

$$v(t) = f'(t)$$

- **Notation:** Zeitableitung mit Punkt statt Strich, $\dot{f}$ statt f'
- Betrag der Geschwindigkeit: $\|\dot{f}(t)\|$
- Bewegungsrichtung: Einheitsvektor in Richtung von $\dot{f}(t)$,

$$e_{\dot{f}(t)} = \frac{\dot{f}(t)}{\|\dot{f}(t)\|}.$$

zweite Ableitung $\ddot{f}(t)$: Beschleunigung
Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\dot{f}(t)$ mit der Zeit

Bedeutung von $f(t)$	Bezeichnung für $\dot{f}(t)$
Position $[\mathrm{m}]$	Geschwindigkeit $[\mathrm{m}/\mathrm{s}]$
Geschwindigkeit $[\mathrm{m}/\mathrm{s}]$	Beschleunigung $[\mathrm{m}/\mathrm{s}^2]$
Winkel $[\ ]$	Winkelgeschwindigkeit $[1/\mathrm{s}]$
Menge $[\mathrm{X}]$	Zuwachsrate $[\mathrm{X}/\mathrm{s}]$
Energie $[\mathrm{Joule}]$	Leistung $[\mathrm{Watt}]$
el. Ladung $[\mathrm{Coulomb}]$	el. Strom $[\mathrm{Ampere}]$

Notation: $f' = \dfrac{df}{dx}$ oder $\dot{f} = \dfrac{df}{dt}$ wenn f Funktion von x bzw. t

Ableitungen einiger wichtiger Funktionen ($\alpha \in \mathbb{R}$)

f	f'
$x \mapsto c$	0
$x \mapsto \alpha x$	α
$x \mapsto x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto 1/x$	$x \mapsto -1/x^2$
$\exp$	$\exp$
$\log$	$x \mapsto 1/x$
$\sin$	$\cos$
$\cos$	$-\sin$

Satz: (Summen- und Produktregel)
Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar, so auch $f + g$ und αf für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

- $(f + g)' = f' + g'$ und
- $(\alpha f)' = \alpha f'$.

Im Fall $d = 1$ ist auch fg differenzierbar mit $(fg)' = f'g + g'f$.

Beispiel: Ableiten eines Polynoms

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dx} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Eberhard Karls Universität Tübingen

Satz: (Kettenregel)
Sind $g : [a, b] \to [c, d]$ und $f : [c, d] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar, dann ist die verkettete Funktion

$$h := f \circ g : \quad \begin{array}{rcl} [a, b] & \to & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$$

differenzierbar mit $h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.

Beispiele:

- $(e^{-\lambda x})' = -\lambda\, e^{-\lambda x}$
- $\left(e^{-x^2}\right)' = -2x\, e^{-x^2}$

Ableitung der Umkehrfunktion: Hat die Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ eine Umkehrfunktion f^{-1}, so gilt $f^{-1}(f(x)) = x$. Mit der Kettenregel folgt ${f^{-1}}'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ und damit[1]

$$ {f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \,. $$

(falls Nenner $\neq 0$)

So bestimmt man die Ableitungen von $\log, \arcsin, \arccos, \arctan$ aus denen von $\exp, \sin, \cos, \tan$.

[1] $y := f(x) \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$

Extrema: Oft möchte man für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wissen, wo sie ihr Maximum und ihr Minimum annimmt. Für Maximum oder Minimum sagt man auch Extremum.

Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und hat im Punkt $x \in (a, b)$, der nicht am Intervallende liegt, ein (lokales) Extremum, dann gilt $f'(x) = 0$.

Grund: Horizontale Tangente.

Umgekehrung gilt nicht: Sei $x \in (a, b)$. Wenn $f'(x) = 0$, muss nicht unbedingt ein Extremum vorliegen.

Beispiel: $f(x) = x^3$ hat $f'(x) = 3x^2$ mit Nullstelle bei $x = 0$, aber dort weder Maximum noch Minimum.

Allerdings: Wenn $f'(x) = 0$ **und** $f''(x) > 0$ (oder $f''(x) < 0$), dann hat f in x ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum), d.h. es gibt ein Intervall $[c, d] \subseteq [a, b]$ mit $x \in [c, d]$, so dass in x das eindeutige Minimum (bzw. Maximum) von f auf $[c, d]$ liegt.