

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Integration

Stefan Keppeler

8. Januar 2008

Stammfunktionen

Mittelung

Temperaturen

Temperaturen – gewichtetes Mittel

Niederschlag

Flächeninhalte

Ober- und Untersummen

Definition

Integral

Hauptsatz

Beispiele

Integrale

Mechanische Arbeit

Definition: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ die Ableitung von $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$, so heißt F **Stammfunktion** oder **unbestimmtes Integral** von f .

Bemerkung: Ist F Stammfunktion von f , so ist auch $F + C$, mit beliebiger Konstante $C \in \mathbb{R}^d$, denn

$$(F + C)' = F' + C' \underset{C'=0}{=} F' = f$$

Satz: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ differenzierbar und $f' = 0$ auf ganz $[a, b]$, so ist f konstant.

Beispiel: Führt ein Auto mit der Geschwindigkeit Null, so kommt es nicht vom Fleck.

Folgerung: Ist F Stammfunktion von f , so sind alle Stammfunktionen von f von der Form $F + C$ mit $C \in \mathbb{R}^d$.

Integration: kontinuierliche Summation bzw. Mittelung; **Beispiele:**

1. Zeitmittel der Temperatur

- ▶ $T(t)$: Temperatur an einem Ort zur Zeit t .
- ▶ Mittelwert der Temperaturen zu den Zeitpunkten t_1, \dots, t_n :

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(t_i) \quad (\text{z.B. Mittagstemperaturen im Januar})$$

- ▶ Mittel über alle Zeitpunkte im Intervall $[a, b]$:

$$\bar{T} = \frac{1}{b-a} \int_a^b T(t) dt.$$

(z.B. Monatsdurchschnittstemperatur über Tag und Nacht)

Näherungsweise: Mittelung über n Zeitpunkte, z.B. hinreichend viele Zeitpunkte in gleichmäßigen Abständen so, dass sich $T(t)$ zwischen zwei Zeitpunkten nicht stark verändert (z.B. alle halbe Stunde).

- ungleichmäßige Abstände: **gewichtetes Mittel**

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^n g_i T_i,$$

$g_i \geq 0$: “Gewichte” mit

$$\sum_{i=1}^n g_i = 1$$

(voher: $g_i = 1/n$ für jedes i)

Approximation des kontinuierlichen Zeitmittels:

Zerlege Zeitintervall $[a, b]$ so in Teilintervalle $[a_i, b_i]$ mit $a_1 = a$, $b_i = a_{i+1}$, $b_n = b$ und $t_i \in [a_i, b_i]$,

$$g_i = \frac{b_i - a_i}{b - a}$$

Intervalllänge $\Delta t = b_i - a_i$
 durch Gesamtzeit

exakt, falls T auf jedem Teilintervall $[a_i, b_i]$ konstant

2. Gesamtniederschlag

- ▶ $f(t)$: Niederschlag pro Zeit (mm/h) an einem Ort
- ▶ Gesamtniederschlag im Zeitintervall $[a, b]$

$$G = \int_a^b f(t) dt \quad \text{in mm.}$$

- ▶ Würde der Niederschlag nicht verteilt über ein Zeitintervall niedergehen, sondern schlagartig zu den Zeitpunkten $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$ in den Mengen G_1, \dots, G_n , so wäre die korrekte Formel

$$G = \sum_{i=1}^n G_i.$$

In diesem Fall wäre die f -Funktion nicht aussagekräftig, weil $f = \infty$ an den Zeitpunkten t_i und $f = 0$ sonst.

3. Flächeninhalte

- ▶ Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f \geq 0$, der Abszisse (x -Achse), und den Geraden $x = a$ und $x = b$ ist gegeben durch das Integral

$$\int_a^b f(x) dx .$$

- ▶ Für eine Funktion f , die auch negative Werte annimmt, ist das Integral gerade $A_+ - A_-$, wobei A_+ die Fläche oberhalb der Abszisse und A_- die unterhalb ist. In anderen Worten, jedes Flächenstück wird mit dem Vorzeichen von f versehen.

Definition: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ betrachte eine Zerlegung von $[a, b]$ in n Teilintervalle $[a_{n,i}, b_{n,i}]$, $i = 1, \dots, n$ mit $a_{n,1} = a$, $a_{n,i+1} = b_{n,i}$, $b_{n,n} = b$, so dass für die **Maschenweite**

$$\delta_n = \max_{1 \leq i \leq n} (b_{n,i} - a_{n,i}) \quad \text{gilt} \quad \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Man definiert die **Riemannsche Obersumme** $S_O(n)$ für die n -te Zerlegung,

$$S_O(n) := \sum_{i=1}^n \max_{x \in [a_{n,i}, b_{n,i}]} f(x) (b_{n,i} - a_{n,i}),$$

sowie die **Riemannsche Untersumme** $S_U(n)$,

$$S_U(n) := \sum_{i=1}^n \min_{x \in [a_{n,i}, b_{n,i}]} f(x) (b_{n,i} - a_{n,i}).$$

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann existiert eine Zahl, das **Integral von f über $[a, b]$** ,

$$\int_a^b f(x) \, dx ,$$

so dass

$$S_O(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx \quad \text{und} \quad S_U(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx .$$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f = F'$ stetig, dann ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Ist umgekehrt eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so ist die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(y) \, dy$$

eine Stammfunktion von f .

- Integration eines Polynoms

$$\int_a^b \sum_{k=0}^n c_k x^k dx = ?$$

- Nicht immer gibt es eine “einfache Formel” für die Stammfunktion. Die Gauß-Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ist stetig und besitzt nach dem Hauptsatz eine Stammfunktion

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

Diese lässt sich aber nicht durch “elementare” Funktionen ausdrücken.

- ▶ **Mechanische Arbeit = Kraft mal Weg**, vorausgesetzt, die Kraft ist entlang des Weges konstant.

- ▶ **Beispiel:**

Hebe ein Gewicht von 1 kg um einen Meter an.

Schwerkraft $K = mg$

Masse $m = 1 \text{ kg}$

Schwerefeldstärke auf der Erde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

also $K = 9,81 \text{ kg m/s}^2 = 9,81 \text{ N}$

mechanische Arbeit $A = Ks = 9,81 \text{ N m} = 9,81 \text{ J}$.

- ▶ Ist nun aber die Kraft nicht konstant, sondern beträgt nach Wegstrecke s gerade $K(s)$, so gilt

$$A = \int_{s_1}^{s_2} K(s) ds.$$