Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Mehr zur Differenzial- und Integralrechung

Stefan Keppeler

16. Januar 2008

Definition: Die Zahlenfolge a_n geht gegen unendlich, $a_n \to \infty$, falls $\forall\, r > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n > n_0 :\ a_n > r$, d.h. wenn jeder noch so große Wert r schließlich überschritten wird.

a_n geht gegen minus unendlich, $a_n \to -\infty$, wenn $-a_n \to \infty$.

Beispiel: Für die Funktion (Sättigungskurve)

$$f(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

mit $\lambda > 0$ gilt: $f(a_n) \to 1$ für jede Zahlenfolge a_n mit $a_n \to \infty$. Man schreibt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \text{ oder } f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1.$$

Beispiel: Gauß-verteilte Zufallsgröße: Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

wahrscheinlichster Wert für X: Maximum von f, μ.
Wahrscheinlichkeit, dass X im Intervall $[a, b]$ liegt:

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Allgemein: Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung, beschrieben durch Dichtefunktion f mit $f \geq 0$ und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 ,$$

wobei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

Der Erwartungswert (Mittelwert) bei kontinuierlichen Wahrscheinlichkeits-Verteilungen,

$$\overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

entspricht bei einer diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung dem gewichteten Mittel

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,,$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass X den Wert x_i annimmt.

Eberhard Karls Universität Tübingen

Gegenstand der Masse m bewege sich unter Einfluss der Schwerkraft $K = (0, 0, -mg)$, wobei $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$, entlang der Bahnkurve $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^3$.

Newton: Kraft $=$ Masse mal Beschleunigung, d.h.

$$\ddot{f}(t) = -(0, 0, g) \qquad \text{(Differenzial-Gleichung).}$$

Behauptung:

$f(t) = u + vt - \frac{1}{2}(0, 0, g)t^2$ löst für beliebige $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Setze $t = 0$ in $f(t)$ bzw. $\dot{f}(t)$ ein:

u ist Anfangsposition und v ist Anfangsgeschwindigkeit.

Halten wir in der Funktion $f(x, y)$, d.h. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die Variable y fest ("behandeln y als Zahl") und leiten dann (nach x) ab, so bilden wir die partielle Ableitung von f nach x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Bemerkung: $\partial f / \partial x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Umgekehrt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Beispiel:

$$f(s, t) = se^t + \sin(st)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial s} = e^t + t\cos(st)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = se^t + s\cos(st)\,.$$

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; partielle Ableitung nach x_1 ist
Ableitung in Richtung von $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_1) - f(x)}{h}$$

Richtungsableitungen in beliebiger Richtung: $e \in \mathbb{R}^d$ mit $\|e\| = 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + he) - f(x)}{h} \qquad \left(= \frac{\partial f}{\partial e}(x) \right)$$

Richtungsableitung lässt sich aus den partiellen Ableitungen berechnen, z.B. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $e = (e_1, e_2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial e} = e_1 \frac{\partial f}{\partial x} + e_2 \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} .$$

Der Vektor mit den Komponenten $\partial f/\partial x_i$ heißt Gradient von f,

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_d}\right).$$

und ist ein Vektorfeld, d.h. eine Funktion $\nabla f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

$\nabla f(x)$: Richtung des steilsten Anstiegs
$\|\nabla f(x)\|$: Steigung (Richtungsableitung) in dieser Richtung

Tangentialebene T an den Graphen von f im Punkt ξ:

$$T(x) = f(\xi) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)\,(x_i - \xi_i) = f(\xi) + \nabla f(\xi) \cdot (x - \xi).$$

wobei $u \cdot v$ für $u, v \in \mathbb{R}^d$ das Skalarprodukt ($\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$) ist,

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i = (u_1, \ldots, u_d) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$$

Eberhard Karls Universität Tübingen

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ hat d erste partielle Ableitungen und d^2 zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f \, ,$$

die die sogenannte Hesse-Matrix H bilden. **Beispiel:** $f(x, y)$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Satz: Wenn die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar ist und die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} .$$

Folgerung: H ist dann eine symmetrische Matrix, $H^T = H$.