Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Volumenintegrale

Stefan Keppeler

13. Februar 2008

Eberhard Karls Universität Tübingen

- Die Masse m eines Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^3$
  mit ortsbhängiger Dichte $\rho(x)$
  erhält man durch das Volumenintegral,

$$m = \int_K \rho(x)\, \mathrm{d}^3x = \int_K \rho(x)\, \mathrm{d}V$$

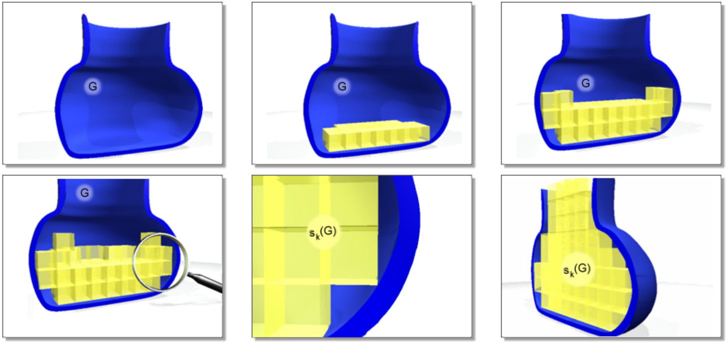
  (2 Schreibweisen, V wie Volumen).

  K kann z.B. ein Quader sein, eine Kugel, eine Kartoffel (d.h. unregelmäßige Form).

- Für konstante Dichte ist das Integral proportional zum Volumen,

$$m = \int_K \rho\, \mathrm{d}^3x = \rho \underbrace{\int_K \mathrm{d}^3x}_{=V \text{ (Volumen)}}.$$

Volumenberechnung (Untersumme, $G \subseteq \mathbb{R}^3$)



Quelle: `www-hm.ma.tum.de/integration/course/html/ch2/t/t_parent.htm`

Definitionsskizze: (Volumenintegral)

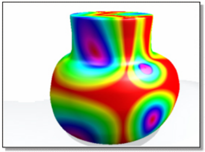
- Zerlege die 3-dimensionale Menge K
  in kleine Teilmengen K_i, $i = 1, \ldots, n$,
  z.B. Würfelchen der Kantenlänge δ.
- Definiere Riemannsche Ober- und Untersumme,

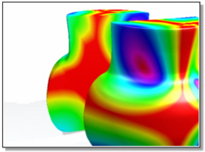
$$S_O = \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in K_i} \rho(x) \, \mathrm{Vol}(K_i) \, , \qquad S_U = \sum_{i=1}^{n} \min_{x \in K_i} \rho(x) \, \mathrm{Vol}(K_i) \, ;$$

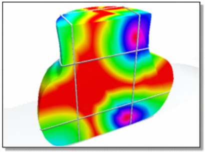
  für Würfelchen: $\mathrm{Vol}(K_i) = \delta^3$.
- Betrachtet eine Folge immer feinerer Zerlegungen, $\delta \to 0$;
  der Limes der Ober- und der Untersummen ist gleich
  (für hübsche Funktionen ρ),
  und definiert das Volumenintegral.

$\leftarrow$ Körper K

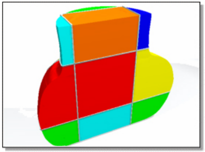
Funktion $\rho(x)$ $\rightarrow$





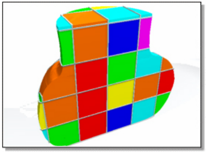


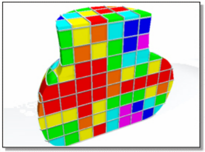
Zerlege in Würfelchen



approximiere ρ

verfeinere





Quelle: www-hm.ma.tum.de/integration/course/html/ch2/t/t_parent.htm

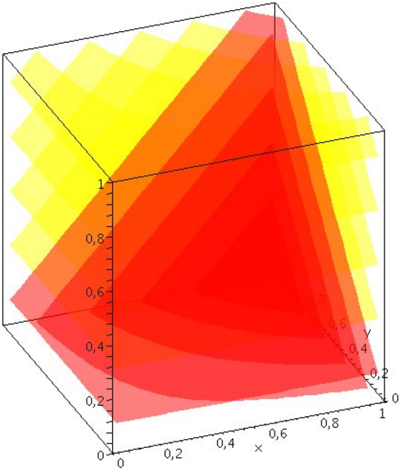
Satz von Fubini: Ist K ein achsenparalleler Quader,
$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, dann gilt

$$\int_K \rho(x)\,\mathrm{d}^3x = \int_{a_1}^{b_1} \biggl(\int_{a_2}^{b_2} \Bigl(\int_{a_3}^{b_3} \rho(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_3 \Bigr) \mathrm{d}x_2 \biggr) \mathrm{d}x_1 .$$

Dabei spielt die Reihenfolge der drei Integrationen keine Rolle.

Analog für krummlinig berandete K;
dabei zerlegt man K zunächst (näherungsweise) in Quader.

- Würfel mit Kantenlänge 1
  mit inhomogener Dichte $\rho(x, y, z) = 1 - z + xy$



- Volumen zwischen dem Graphen der Funktion $z(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ über dem Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ und der xy-Ebene