Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Differenzialgleichungen

Stefan Keppeler

30. Januar 2008

Definition: Eine Differenzialgleichung (DGL) ist eine funktionale Beziehung zwischen einer Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto x(t)$, und ihren ersten k Ableitungen, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}(t) = f\left(x(t), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t), \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}x}{\mathrm{d}t^k}(t), t\right) . \qquad (*)$$

- Dabei heißt
  - k die Ordnung der DGL,
  - d die Dimension bzw. die Anzahl der Freiheitsgrade.
- $(*)$ heißt auch auch System von d gekoppelten Gleichungen (wenn man statt des Vektors $x(t) \in \mathbb{R}^d$ die Komponenten $x_1(t), \ldots, x_d(t) \in \mathbb{R}$ als abhängige Variablen auffaßt).
- Falls f nicht von t abhängt, so heißt die DGL autonom.

Eberhard Karls Universität Tübingen

Die **Harmonische Schwingungsgleichung** (“harmonischer Oszillator”)

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

ist **autonom**, in einem Freiheitsgrad und von **zweiter Ordnung** mit $f(x, y, t) = -\omega^2 x$ und $d = 1$ und $k = 2$.

- Gilt u.a. für elastische Materialien, die nur in einer Richtung schwingen können (z.B. Federpendel) und für Fadenpendel bei kleiner Auslenkung.
- Allgemeine Lösung:

$$x(t) = c \sin(\omega t + \varphi)\,,$$

mit $c \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ beliebig (vgl. ÜA 58).

Newtonsche Mechanik: Welt besteht aus n Teilchen besteht (vielleicht $n = 10^{80}$), die sich im $\mathbb{R}^3$ bewegen entlang von Bahnen $r_i(t)$ mit

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \left(\gamma \mu_i \mu_j - \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0} \right) \frac{r_j - r_i}{\| r_j - r_i \|^3}$$

und den Parametern

- μ_i = schwere Masse, m_i = träge Masse (empirisch $\mu_i = m_i$),
- γ = Newtonsche Gravitationskonstante,
- q_i = elektrische Ladung, ε_0 = Dielektrizität des Vakuums.

– Merkregel: "Kraft = Masse mal Beschleunigung".
– DGL: autonom, $k = 2$ und $d = 3n$.

Population habe konstante Wachstumsrate

$$w = g - s$$

mit

- g = Geburtenrate,
- s = (natürliche) Sterberate.

Einfachstes Modell für Populationsgröße $N(t)$ ist

$$\dot{N} = wN\,.$$

- autonome DGL
- erster Ordnung ($k = 1$)
- in einem Freiheitsgrad ($d = 1$)

Allgemeinen Lösung (exponentielles Wachstum):

$$N(t) = N_0\, e^{wt}\,.$$

Entnimmt der Mensch (durch Ernten, Jagen, Fischen) die Menge $E(t)\,dt$ im Zeitintervall $[t, t+dt]$, so lautet die DGL

$$\dot{N} = wN - E\,.$$

Diese Gleichung ist nicht autonom, $f(N,t) = wN - E(t)$.
Typische Fragestellungen:

- Funktion $t \mapsto E(t)$ explizit bekannt, z.B. $E(t) = c\,\sin(\omega t)$: Bestimme Lösung $N(t)$ (analytisch oder numerisch).
- Oft stellt man aber auch die Frage, wie man E wählen sollte, um ein bestimmtes Verhalten von N zu erhalten (z.B. keine dramatische Schrumpfung).

Jede DGL ist äquivalent zu einer DGL erster Ordnung, indem man für die Ableitungen von x neue Variablen einführt.

Beispiel: Aus dem harmonischen Oszillator ($k = 2$, $d = 1$) machen wir

$$\dot{x} = v\,, \quad \dot{v} = -\omega^2\,x\,.$$

- DGL (System) erster Ordnung in 2 Freiheitsgraden ($k = 1$, $d = 2$)
- kd ändert sich nicht.

Allgemein wird aus DGL der Ordnung k in d Freiheitsgraden eine DGL erster Ordnung in kd Freiheitsgraden:

$$\dot{x} = y_1\,, \quad \dot{y}_1 = y_2\,, \quad \dots, \quad \dot{y}_{k-1} = f(x, y_1, \dots, y_{k-1}, t)\,,$$

wobei $y_i(t) \in \mathbb{R}^d$.

Der Raum $\mathbb{R}^{kd}$ mit den Achsen $x, y_1, \dots, y_{k-1}$ heißt Phasenraum.

Beispiele: (i) Harmonischen Oszillator

- Phasenraum: 2-dimensional
- Achsen: x und v (Ort und Geschwindigkeit)
- Allgemeine Lösung: Ellipsen

$$x(t) = c\,\sin(\omega t + \varphi)\,, \quad v(t) = \omega c\,\cos(\omega t + \varphi)\,,$$

(ii) Newtonsche Mechanik: Phasenraum $6n$-dimensional.

Reduktion auf autonome Gleichungen. Jede DGL (erster Ordnung) ist äquivalent zu einer autonomen DGL, indem man eine weitere Variable x_{d+1} (die Zeit) einführt und die zusätzliche Gleichung $\dot{x}_{d+1} = 1$, d.h. aus

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_d, t) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_d = f_d(x_1, \ldots, x_d, t) \end{cases}$$

wird

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_d = f_d(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \\ \dot{x}_{d+1} = 1\,. \end{cases}$$

Satz von Picard und Lindelöf (1890): Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und f ein Vektorfeld auf D, $f : D \to \mathbb{R}^d$. Wir betrachten die autonome DGL erster Ordnung als Anfangswertproblem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)\,, \quad x(t_0) = x_0\,. \tag{$*$}$$

Unter technischen Bedingungen an D und f (D eine offene Menge, f ist dehnungs-beschränkt (Lipschitz-Bedingung)) gilt:

- Für jedes $x_0 \in D$ existiert genau eine Lösungsfunktion $t \mapsto x(t)$ von ($*$).
- Sie ist definiert auf einem Intervall $(T_{\text{Anfang}}, T_{\text{Ende}})$, das t_0 enthält,
- wobei $T_{\text{Anfang}} = -\infty$ und/oder $T_{\text{Ende}} = \infty$ sein kann, aber nicht sein muss.

Folgerungen:

- Zwei Lösungskurven können sich nie schneiden (im Phasenraum), denn

$$\dot{g} = f(g) \qquad \text{und} \qquad \dot{h} = f(h)$$
$$\text{und} \quad g(t_0) = h(t_0)$$

  $\Rightarrow g(t) = h(t)$ für alle t.
- Bei einer DGL der Ordnung k in d Freiheitsgraden kann man kd Anfangswerte wählen (z.B. $6n$ in der Newtonschen Mechanik).

Eine Lösung kann nach endlicher Zeit aufhören zu existieren, indem

- $x(t)$ den Rand des Definitionsbereiches D erreicht.
  Beispiel: x reell und positiv: $D = [0, \infty)$. Sinkt $x(t)$ auf Null, so kann es nicht mehr weiter sinken.
- sie in endlicher Zeit ins Unendliche wächst (Singularität).

Michaelis-Menten-Kinetik (1913): Reaktion unter Einfluss eines Enzyms,

$$S + E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE, \quad SE \xrightarrow{k_2} P + E\,.$$

- S Substrat
- E Enzym
- SE Komplex
- P Produkt
- k_{-1}, k_1 und k_2 Ratenkonstanten (Parameter); legen Reaktionsraten (Reaktionsgeschwindigkeiten) fest.

Massenwirkungsgesetz: Reaktionsrate ist proportional ist zum Produkt der Konzentrationen der Reaktanten,

$$s = [S], \quad e = [E], \quad c = [SE], \quad p = [P].$$

Massenwirkungsgesetz liefert DGL-System:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -k_1 es + k_{-1}c\,, \qquad \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -k_1 es + (k_{-1} + k_2)c$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = k_1 es - (k_{-1} + k_2)c, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = k_2 c.$$

Anfangsbedingungen:

$$s(0) = s_0, \quad e(0) = e_0, \quad c(0) = 0, \quad p(0) = 0\,.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems liefert uns die Konzentrationen als Funktion der Zeit.

Vereinfachungen:

- Die letzte Gleichung ist entkoppelt (p taucht nur dort auf)

$$\Rightarrow \qquad p(t) = k_2 \int_0^t c(u)\,\mathrm{d}u \qquad p \text{ ist allein durch } c \text{ bestimmt}$$

- Enzym E ist Katalysator: Gesamtkonzentration (frei plus kombiniert) ist konstant,

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad e(t) + c(t) = e_0\,.$$

  Erhaltungssatz (vgl. z.B. Energie-Erhaltungssatz in der Physik). Folgt aus DGL-System, indem man die zweite und die dritte Gleichung addiert.

Wir erhalten somit das vereinfachte DGL-System

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1})c\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = k_1 e_0 s - (k_1 s + k_{-1} + k_2)c$$

mit Anfangsbedingungen $s(0) = s_0, c(0) = 0$.

Nicht analytisch lösbar, **aber** qualitatives Verhalten ablesbar:

- Bei $t = 0$ fällt s, während c steigt, von 0 beginnend
- solange c noch klein ist, muss s weiter fallen und c weiter steigen
- c steigt so lange bis $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = 0$, d.h. $c = \frac{k_1 e_0 s}{k_1 s + k_{-1} + k_2}$;
  an dieser Stelle gilt $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -k_2 c$, also fällt s immer noch.