

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 3 (Abgabe am 02.11.2007)

Aufgabe 12

(10 Punkte)

Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x^l \binom{l}{k}$$

Aufgabe 13

(10 Punkte)

Das Pascalsche Dreieck baut man wie folgt aus den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ auf:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \dots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots \end{array}$$

Dabei wächst also n nach unten und k nach rechts hin. Die Beziehung

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

aus der Vorlesung sagt uns, daß am linken und rechten Rand ausschließlich Einsen stehen. Weiter folgt aus der Funktionalgleichung, daß sich alle anderen Einträge jeweils als Summe der beiden rechts und links darüberstehenden ergibt.

- Konstruieren Sie auf diese Weise die ersten 10 Zeilen des Pascalschen Dreiecks!
- Wie äußert sich die Beziehung

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

aus der Vorlesung im Pascalschen Dreieck?

- Was bedeutet die Beziehung

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

aus der Vorlesung am Pascalschen Dreieck?

- Wie verhält sich $\binom{2n}{n}$ asymptotisch für große n ? Vergleichen Sie für $n = 1, 2, \dots, 6$ den exakten Wert aus Ihrem Pascalschen Dreieck mit der Asymptotik! (Geben Sie den relativen Fehler an!)

HINWEIS: Verwenden Sie die Stirlingsche Formel!

Aufgabe 14

(10 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\prod_{\nu=1}^n (1 + x_{\nu}) \geq 1 + \sum_{\nu=1}^n x_{\nu} \quad \text{falls } x_{\nu} \geq -1 \quad \text{und} \quad x_{\nu} x_{\mu} \geq 0 \quad \forall \mu, \nu.$$

HINWEIS: Denken Sie an die Bernoullische Ungleichung!

Aufgabe 15

(20 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^2 + 7, \quad g(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad h(x) = x^3 - 1.$$

- a) Bestimmen Sie jeweils Definitions- und Wertebereich!
- b) Existieren die folgenden Verknüpfungen? Gegen Sie ggf. Definitions- und Wertebereich an!
- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| (i) $f \circ g$ | (ii) $g \circ f$ | (iii) $f \circ h$ |
| (iv) $h \circ f$ | (v) $g \circ h$ | (vi) $h \circ g$ |
- c) Geben Sie $h \circ f$ und $f \circ h$ explizit an!