Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe am 09.11.2007)

Aufgabe 16 (10 Punkte)

Bestimmen Sie (falls existent) die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{n^3+3n-1}{n^2}+3n\right)\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-2\sqrt{n}}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

Aufgabe 17 (10 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen stetig, stetig fortsetzbar (und wie?) bzw. unstetig?

a) $f(x)=\frac{x^2-x-12}{x-3}$ b) $f(x)=\frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$ c) $f(x)=\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

Aufgabe 18 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktionen!

a) $f(x)=\frac{x^3-1}{(x-1)(x+2)}$ b) $f(x)=\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$ c) $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2+1}}{x+2}$

Aufgabe 19 (10 Punkte)

Zeigen Sie für $n\in\mathbb{N}_0$:

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n)}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}f^{(\nu)}(x)\,g^{(n-\nu)}(x)\,.$$

Dabei ist $f^{(k)}(x)$ die $k$te Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x, d.h. $f^{(0)}=f$, $f^{(1)}=f'$, $f^{(2)}=f''$ etc.

Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion nach n durch, und werfen Sie eine Blick auf den Beweis der Binomischen Formel (Satz 1).

Aufgabe 20 (10 Punkte)

Es sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n, d.h.

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu\,,\qquad a_\nu\in\mathbb{R}\,,$$

sowie $x_0\in\mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie:

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{P^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu\,.$$