Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 16.11.2007)

Aufgabe 21 (10 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung!

a) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$ b) $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ c) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$

d) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ e) $f(x) = |x^2 - 1|$

Aufgabe 22 (Implizite Ableitung) (10 Punkte)

Die Funktion $y(x)$ sei gegeben durch

$$x^2 y^3 - 3(x+1)^2 = (x^3 - 1)y - 11\,.$$

Berechnen Sie $y(1)$ und $y'(1)$ und stellen Sie die Tangentengleichung[1] im Punkt $(1, y(1))$ auf!

Aufgabe 23 (Stetige Verzinsung) (10 Punkte)

Ein Guthaben wird jährlich mit einem Zinssatz von 8% verzinst. Nun soll stattdessen n mal pro Jahr mit einem n-tel des Zinssatzes verzinst werden. Wie hoch ist der effektive Jahreszins, d.h. um welchen Prozentsatz ist das Guthaben innerhalb eines Jahres gewachsen (inkl. Zinseszinsen), wenn

a) halbjährlich mit 4%, b) monatlich mit $\frac{2}{3}$%,
c) täglich (kein Schaltjahr) mit $\frac{8}{365}$% d) kontinuierlich (d.h. $n \to \infty$)

verzinst wird? Geben Sie für a) – d) das Ergebnis gerundet auf 4 Nachkommastellen sowie für d) auch das exakte Ergebnis an.

Aufgabe 24 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n+2}\right)^{n-3}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{5n}$

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
$$\text{und} \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\,.$$

a) Für welche x sind die Funktionen definiert?
b) Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$!
c) Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

---

[1] Hinweis: Machen Sie sich anhand einer Skizze klar, daß die Tangente $t(x)$ an $f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ durch $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ gegeben ist!