Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 30.11.2007)

Aufgabe 32 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihen von

a) $\sinh x$ b) $\cosh x$ c) $\operatorname{Artanh} x$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

Aufgabe 33 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{1+4x^3}$ um Null, b) $\dfrac{1}{(1-x^2)^2}$ um Null,

c) $\dfrac{1}{5-x}$ um Null, d) $\dfrac{1}{1+x}$ um $x_0 = 2$,

und geben Sie an, für welche x die Reihen konvergieren.

Aufgabe 34 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihe von

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{um Null}.$$

Für welche x konvergiert die Reihe? Für welche x konvergiert die Reihe gegen die Funktion?

Aufgabe 35 (10 Punkte)

Bestimmmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{x(\mathrm{e}^x - 1)}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\log x)}{\sqrt{x}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)^3}{x^6 + 3x^7}$

Aufgabe 36 (Extremwert-Test) (10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie: Ist eine Funktion f auf dem Intervall $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ n mal stetig diffbar und gilt ($x_0 \in I$)

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,,$$

dann folgt

(i) x_0 ist Extremalstelle $\iff$ n ist gerade

(ii) n gerade, $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\implies$ x_0 ist lokale Maximalstelle

n gerade, $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\implies$ x_0 ist lokale Minimalstelle

Definition: x_0 heißt Maximalstelle von f, wenn gilt:

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall\, x \neq x_0 \quad \text{aus einer Umgebung von } x_0\,.$$

($\ldots$ Minimalstelle $\ldots$ $f(x) > f(x_0)$ $\ldots$)

Hinweise: Stellen Sie $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 durch das $n-1$-te Taylorpolynom plus Restglied dar. Aus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ folgt natürlich auch $f^{(n)}(\xi) \neq 0$ $\forall\, \xi$ in einer kleinen offenen Umgebung von x_0.