Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 07.12.2007)

Aufgabe 37 (10 Punkte)

Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) mit Addition modulo n (d.h. z.B. $2 + (n-1) = 1$) ist eine Gruppe.

b) $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ mit Addition und Multiplikation modulo n ist kein Körper, wenn $n \in \mathbb{N}$ keine Primzahl ist.

Aufgabe 38 (10 Punkte)

a) Sei $(\{1, A, B\}, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1. Füllen Sie die folgende Multiplikationstabelle aus.

$\cdot$	1	A	B
1			
A			
B			

Begründen Sie, warum es nur eine Lösung (also nur eine dreielementige Gruppe) gibt.

b) Ergänzen Sie die folgende Additionstabelle so, daß $(\{0, 1, A, B\}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

$+$	0	1	A	B
0		1	A	B
1		0	B	
A				1
B				

c) $(\{0, 1, A, B\}, +, \cdot)$ mit den Additions- und Multiplikations-Tabellen aus den Aufgabenteilen a) und b) ist ein Körper (genannt $\mathbb{F}_4$). Überprüfen Sie explizit das Distributivgesetz am Beispiel $(A + 1) \cdot B = A \cdot B + 1 \cdot B$.

Aufgabe 39 (10 Punkte)

Zeigen Sie

a) Die Menge der bijektiven Abbildungen $f : A \to A$, $A \neq \emptyset$ bildet bezüglich der Komposition (also $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \; \forall \, x \in A$) eine Gruppe. Diese Gruppe ist i.A. nicht abelsch.

b) $(\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}, \cdot)$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yv \\ xv + yu \end{pmatrix}$$

ist eine Gruppe. Dabei ist $\vec{0} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Ist die Gruppe abelsch?

Aufgabe 40 (10 Punkte)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K?

a) $M = \{$Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 5 und Nullstellen bei $-4, 0$ und 3 $\}$, $K = \mathbb{R}$

b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \cdot y \leq 1 \right\}$, $K = \mathbb{R}$

c) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{Q}$

d) $M = \mathbb{Q}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Q} \right\}$, $K = \mathbb{R}$

e) $M = \mathbb{Q}^2$, $K = \mathbb{Q}$

Aufgabe 41 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, und stellen Sie – falls möglich – den Vektor $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ durch sie dar.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$