Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 21.12.2007)

Aufgabe 47 (10 Punkte)

Welche Dimension hat der durch die folgenden Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^5$,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}7\\1\\3\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\5\\3\\8\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}7\\4\\6\\0\\0\end{pmatrix}?$$

Aufgabe 48 (10 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird!

a) $V=\mathbb{R}^n$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{j=1}^{n}a_jb_j$ b) $V=\mathbb{R}^3$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1+5a_2b_2+2a_3b_3$

c) $V=\mathbb{R}^2$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2$ d) $V=\mathbb{R}^2$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1-a_2b_2$

e) $V=\mathbb{R}^2$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=2a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig zeigen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\sum_j\sum_k\mu_{jk}a_jb_k$ mit $\mu_{kj}=\mu_{jk}$.

Aufgabe 49 (10 Punkte)

Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|$ jeweils eine Norm auf V erklärt!

a) $V=\mathbb{R}^n$, $\|\vec{a}\|=\max\limits_{j\in\{1,\dots,n\}}|a_j|$, für $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

b) $V=C([0,1]):=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,f\text{ stetig}\}$, $\|f\|=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$

Aufgabe 50 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie eine ON-Basis für $U\subset\mathbb{R}^4$,

$$U=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle,$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 48 e). Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 51 (10 Punkte)

Zeigen Sie $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$. Geben Sie außerdem ein Beispiel an, für das $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.