

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 11.01.2008)

Aufgabe 52 (Cramersche Regel) (10 Punkte)

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Das lineare Gleichungssystem

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b} \quad x_j \in \mathbb{R} \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

wird durch

$$\vec{x} = \frac{1}{|\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3|} \begin{pmatrix} |\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3| \\ |\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3| \\ |\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}| \end{pmatrix}$$

gelöst. Dabei ist $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ das Spatprodukt.

Aufgabe 53 (10 Punkte)

Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene im \mathbb{R}^3 ,

$$-3x_1 - 7x_2 + x_3 = 5.$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform dieser Ebene an. Welchen Abstand hat die Ebene zum Ursprung?

Aufgabe 54 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (i) eine ONB des \mathbb{R}^3 und (ii) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)) \cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t)) \sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von \vec{e}_r , \vec{e}_θ und \vec{e}_ϕ aus.

Aufgabe 55 (10 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie jeweils Geschwindigkeit und Beschleunigung, sowie deren Beträge:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}.$$

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!