Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 18.01.2008)

Aufgabe 56 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$:

a) $(1,2)$ b) $(2,-1)$ c) $(-1,3)$ d) $(-3,-1)$

Geben Sie die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ) an:

e) $(1,0,0)$ f) $(0,\pi,0)$ g) $(1,0,1)$

Aufgabe 57 (10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) A^TA, c) AA^TB, d) A^TAB,
e) B^TA^TA, f) A^2, g) AA^TAA^T.

Aufgabe 58 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie damit die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $Y \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} , \qquad AX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad AY = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 59 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ von $AX = B$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 10 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 60 (10 Punkte)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix gemäß

$$A^0 = I\,, \quad A^1 = A\,, \quad A^2 = AA\,, \quad A^3 = AAA\,, \ \ldots$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Weiter definieren wir die Matrixexponentialfunktion durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h.

$$\mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\,. \quad \text{Berechnen Sie } \mathrm{e}^{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\,.$$

Hinweis: Aus der Matrixaddition (komponentenweise) folgt natürlich

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}\,.$$