

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 25.01.2008)

---

### Aufgabe 61

(10 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 17 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3i-2 & -i \\ i & 1 & 0 & -2+i \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 62

(10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie:  $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$  mit

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

und dem Matrixprodukt  $\cdot$  ist für  $n \geq 2$  eine nicht-abelsche Gruppe.

### Aufgabe 63

(10 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase der folgenden komplexen Zahlen  $(x, y \in \mathbb{R})$ ,

$$\text{a) } 13 \quad \text{b) } 5i \quad \text{c) } 1 - i \quad \text{e) } e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{f) } e^{x+iy}$$

sowie Real- und Imaginärteil von g)  $(x + iy)^3$ .

### Aufgabe 64

(10 Punkte)

Zeigen Sie für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

HINWEIS: Zeigen Sie zunächst  $\sin(ix) = i \sinh x$  und  $\cos(ix) = \cosh x$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe 65

(10 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten) für  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{\nu=0}^n \cos(\nu x).$$

### Aufgabe 66

(10 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Vektorräume  $V$  über  $K$  die Dimension und eine Basis an.

$$\text{a) } V = \mathbb{C}^3, K = \mathbb{C} \quad \text{b) } V = \mathbb{C}^3, K = \mathbb{R}$$

$$\text{c) } V = \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid z_2 = iz_1 \right\}, K = \mathbb{C} \quad \text{d) } V \text{ wie in (c), } K = \mathbb{R}$$