Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

# Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 14 (Abgabe am 01.02.2008)

---

**Aufgabe 67** (10 Punkte)

a) $\displaystyle\int_1^4 (3x + 14 - 7\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$  b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} := \lim_{y\to\infty}\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$  d) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} := \lim_{y\to -1+}\int_y^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

Hinweis: Werfen Sie nochmal einen Blick auf die Ableitungen der inversen trigonometrischen Funktionen.

**Aufgabe 68** (10 Punkte)

Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f : x \mapsto x^2 + x$, der Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 2$ sowie der $x$-Achse eingeschlossen wird.

**Aufgabe 69** (10 Zusatzpunkte)

a) Die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$,

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\langle\cdot,\cdot\rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

ist ein Skalarprodukt.

b) Analog ist für komplexwertige Funktionen

$$C([a,b],\mathbb{C}) := \big\{f : [a,b] \to \mathbb{C} \,\big|\, f = u + \mathrm{i}v \text{ wobei } u, v \in C([a,b])\big\}$$

ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß hierdurch

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

**Aufgabe 70** (10 Zusatzpunkte)

Zeigen Sie: Die Funktionen $\phi_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ sind paarweise orthogonal in $C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 69b, d.h. $\langle\phi_n, \phi_m\rangle = 0\ \forall\ n \neq m$. Geben Sie Konstanten $N_n \in C$ an, so daß $\|N_n\phi_n\| = 1$.

Hinweis: $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})' = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)' = -\sin x + \mathrm{i}\cos x = \mathrm{i}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$

**Aufgabe 71** (10 Punkte)

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^3} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,,$  b) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{100} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$

Hinweis: Denken Sie daran, daß die Ableitung von $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ durch $F'(x) = f(x)$ gegeben ist.