Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 8.2.2008

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar.
Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).
Hilfmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4). Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 2 (4+4+4 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=2}^{n} x^{n+\nu}\,, \quad n \geq 2\,,\ x \neq 1\,,$

b) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{x^{\mu}}{\mu+1}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,\ x \neq 1\,,$

c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \sin(\nu x)\,, \quad x \in (0, 2\pi)\,.$

Aufgabe 3 (4+3+3+3 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - x - 1)^3}{4x^8 - 3x^6}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - n}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}-5}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right)$

Aufgabe 4 (3+3+3 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen f, g und h,

$$f(x) = 7^x\,, \qquad g(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,, \qquad h(x) = \int_x^{x^2} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe 5 (3+3+3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_{-3}^{5} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}} \frac{1}{x \log x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 6 (5+4+7+3 Punkte)

Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$, d.h.:

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f. Wo ist f stetig fortsetzbar und wie?
b) Bestimmen Sie alle (senkrechten, waagerechten und schiefen) Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen und alle Extrema.
d) Skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 7 (5+2 Punkte)

a) Berechnen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 3 \\ 1 & 1 & 3 & \alpha \end{pmatrix}.$$

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

linear abhängig?

Aufgabe 8 (3+2+4+3+3 Punkte)

Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{1}{7+x}$ b) e^{-x^2} c) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1-x)}$ d) $\dfrac{\sin x}{x}$

e) Bestimmen Sie die 100. Ableitung von $\dfrac{\sin x}{x}$ an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 9 (4+2 Punkte)

a) Berechnen Sie AB für

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & -1 & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} & 1 \\ -1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Für welche $\phi \in \mathbb{R}$ ist $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Beschreiben die beiden folgenden Mengen dieselbe Ebene?

$$E_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

HINWEIS: Berechnen Sie die Hessesche Normalform.