Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 8.4.2008

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Geben Sie auch stets Ihren Lösungsweg an. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar.
Es sind maximal 94 Punkte erreichbar, 74 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).
Hilfmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4) Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 - \frac{1}{n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ n \geq 2$$

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} x^{2\nu}\,, \quad n \geq 0\,,\ |x| \neq 1\,,$ b) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{x^\mu}{n-\mu+1}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,\ x \neq 1\,,$

Aufgabe 3 (4+3+3+3 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)^2}{2x^7 + x^6}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 2n}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{7-n}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n\, n}{n^2}$

Aufgabe 4 (3+3+3 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen f, g und h,

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos(x^2)}\,, \qquad g(x) = 3^x\,, \qquad h(x) = \int_0^{\sin x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe 5 (3+3+3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to [2,\infty)$, definiert durch $x \mapsto \cos x + \cosh x$, ist bijektiv. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $\cosh\pi - 1$, d.h. berechnen Sie ${f^{-1}}'(\cosh\pi - 1)$.

Aufgabe 7 (4+4+5+2 Punkte)

Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, d.h.:

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f. Wo ist f stetig fortsetzbar und wie?
b) Bestimmen Sie alle (senkrechten, waagerechten und schiefen) Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen und alle Extrema.
d) Skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 8 (4+2 Punkte)

Sei $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 3 \\ 2 & -1 & 3 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie $\det A$.
b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt A eine Inverse?

Aufgabe 9 (3+3+4+4 Punkte)

Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{1}{2+4x}$ b) $\cos(x^2)$ c) $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ (stetig fortgesetzt bei $x=0$)
d) $\dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Berechnen Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ von $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11 (5 Punkte)

Sei E die Ebene, die die Punkte

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

enthält. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E.