Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 07/08

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Probeklausur

Der Umfang dieses Aufgabenblatts sowie der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist vergleichbar mit dem, was Sie in der Klausur erwartet (deckt allerdings nur den bis Weihnachten behandelten Stoff ab). Sie können diese Aufgaben zu Hause für sich bearbeiten. Ihre Lösung ist nicht abzugeben und wird auch nicht korrigiert; Sie dürfen aber gerne Fragen dazu in der Übungsstunde stellen.

Es sind maximal 82 Punkte erreichbar, 60 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Die Klausur ist für 90 Minuten ausgelegt.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

Aufgabe 2 (3+3+3 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a)
$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^{n+\nu}\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

b)
$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{x^{\mu}\nu}{\mu(\mu+1)}\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,,\ x \neq 1\,.$$

c)
$$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=\nu}^{n} \frac{1}{\mu+1}\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Aufgabe 3 (2+2+2+3+3 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^7 + (-1)^n\, n^6}{3n^7 - 5n^5 + 8}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n+1}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 + 3n}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)^3}{2x^6 + x^8}$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to [2, \infty)$, definiert durch $x \mapsto \cos x + \cosh x$, ist bijektiv. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $\cosh \pi - 1$, d.h. berechnen Sie $f^{-1\prime}(\cosh \pi - 1)$.

Aufgabe 5 (4+4+5+2 Punkte)

Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$, d.h.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f. Wo ist f stetig fortsetzbar und wie?
b) Bestimmen Sie alle (senkrechten, waagerechten und schiefen) Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen und alle Extrema.
d) Skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 6 (3+3 Punkte)

Berechnen die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) x^x b) $\dfrac{e^x \sin^2 x}{\cos(x^3)}$

Aufgabe 7 (3+3+3 Punkte)

Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{x}{3 + x}$ b) $\sin(x^2)$ c) $\dfrac{1}{(1 - x)(1 - 2x)}$

Aufgabe 8 (2+4 Punkte)

Sind die folgenden Mengen Unterräume des $\mathbb{R}^4$? Geben Sie ggf. ihre Dimension an.

a) $$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

b) $$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei die Ebene

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \right\}$$

gegeben. Geben Sie eine Parameterdarstellung, $E = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \vec{p} + s\vec{v} + t\vec{w}\,,\ t, s \in \mathbb{R}\}$, der Ebene an.