Übungsblatt

Dies ist eine wahllose Sammlung von zusätzlichen Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf die Nachklausur. Einige der Aufgaben könnten etwas schwieriger sein als die durchschnittliche Klausuraufgabe, dafür sind einige sicherlich zu leicht.

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
   (a) $\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu}$
   (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 7$ gilt $n! \geq 3^n$.
   (c) $4^n - (-1)^n$ ist durch 5 teilbar.
   (d) Es gilt $\sum_{\nu=n}^{2n} = \frac{3}{2}n(n+1)$.
   (e) Verwenden Sie partielle Integration, um zu zeigen, dass $\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = n!$ gilt.
   (f) $\Pi_{k=1}^{n}(1 + \frac{m}{k}) = \binom{n+m}{n}, \quad n, m \in \mathbb{N}$

2. Berechnen Sie die folgenden Summen:
   (a) $\sum_{\nu=0}^{n} x^2$
   (b) $\sum_{\nu=0}^{n} \cos^2 \nu x$
   (c) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{v(v+2)}$
   (d) $\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} \nu x^\mu$
   (e) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=k}^{n} \binom{\nu}{k} \frac{\nu^k}{(\nu+1)^\nu}$
   (f) $\sum_{\nu=0}^{m} \sum_{k=\nu}^{m} \binom{m}{k} \binom{k}{\nu}$

3. Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 3x}$.

4. Bestimmen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und geben Sie den Grenzwert ggf. an:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{(-1)^n}{n})$
   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{3x^2-1}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x}$
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{n^2 + 4n + 2}\right)$
   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$
   (f) $\lim\limits_{k\to\infty} (2 - \frac{1}{n})^n$
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^n$
   (h) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{3k}$

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sinh(x) -^{x})^8}{x^{24} - x^{30}}$

(j) $\lim\limits_{x \to 1^-} \log x \log(1 - x)$

(k) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin x}{(1 - \cos x)^2}$

5. Es sei $a_1 = 2$ und für $n \geq 2$ sei a_n durch $a_n = \frac{1}{2}(2 + a_{n-1})$ gegeben. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

6. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_2^4 \frac{\log x}{x} \, \mathrm{d}x$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, \mathrm{d}x$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$

(d) $\int_1^2 \sqrt{4 - x} \, \mathrm{d}x$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, \mathrm{d}x$

7. Bestimmen Sie die Stammfunktion folgender Funktionen:

(a) $(\log x)^2$

(b) $\tan(x) \log(\cos x)$

(c) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

(d) $\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$

(e) $\frac{(\log x)^4}{x}$

(f) $x\sqrt{1 + x^2}$

8. Bestimmen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen um den angegebenen Punkt x_0. Geben Sie ebenso an, wo diese jeweils konvergieren.

(a) $\frac{1}{(1-x)^2}, \quad x_0 = 0$

(b) $\frac{1}{x}, \quad x_0 = 2$

(c) $\frac{1}{1+4x}, \quad x_0 = 0$

(d) $\frac{\cos(x)-1}{x^2}, \quad x_0 = 0$

(e) $\operatorname{Artanh}(x - 1), \quad x_0 = 1$

(f) $\sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

(g) $x^3 \mathrm{e}^{x^2}, \quad x_0 = 0$

9. Zeigen Sie, dass $\int_{-1}^1 \tan(\sin(x)) \, \mathrm{d}x = 0$.
Hinweis: Hierfür müssen Sie keine Stammfunktion bestimmen.

10. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden, die durch

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

gegeben sind.

11. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&0&1&-1\\-1&6&0&2\\2&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

12. Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zu $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}$. Lösen Sie anschließend $A\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

13. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:
    (a) 4^{x^2}
    (b) $\cos(\cos(\sin^2(x)))$
    (c) $\tanh(\log(\sinh(x)))$
    (d) $\int_{\sin(x)}^{3x}\cosh\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$
    (e) $(\sin x)^{\sqrt{x}}$

14. Diskutieren Sie die Funktion $\sqrt{x^3-5x^2+6x}$.

15. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von
$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

16. Bestimmen Sie α so, dass der Wert der Determinante von $A=\begin{pmatrix}\alpha&2&0\\1&\alpha-2&1\\3&\alpha&2\end{pmatrix}$ minimal wird.

17. Es sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad 2 oder kleiner. Gegeben seien die drei Elemente x^2+x, βx^2+2 und x^2+x+1 aus V. Für welchen Wert von β sind diese linear abhängig?

18. Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene, die durch die Punkte $(2,0,0)$, $(0,-3,0)$ und $(0,0,4)$ festgelegt ist. Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$