Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
17.10.2007
Blatt 01

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Prüfen Sie, ob die beiden folgenden Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{Q})$ $(n = 3, 4)$ diagonalisierbar sind und geben Sie, falls ja, ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ an, so dass SAS^{-1} diagonal ist:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -6 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (a) Geben Sie (mit Begründung) eine reelle 2×2-Matrix an, deren charakteristisches Polynom (über $\mathbf{R}$) nicht zerfällt.
   (b) Geben Sie (mit Begründung) eine komplexe 2×2-Matrix an, die nicht diagonalisierbar ist.

3. Sei $V = \mathcal{C}([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbf{R} \text{ stetig}\}$ und

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

   Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.

4. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V und $d\colon V \times V \to [0, \infty]$ die induzierte Metrik. Zeigen Sie:
   (a) $d(v, w) = 0$ für $v, w \in V$, genau wenn $v = w$ ist;
   (b) $d(v, w) = d(w, v)$, für alle $v, w \in V$;
   (c) $d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u)$, für alle $v, w, u \in V$.

Abgabe: Mittwoch, 24. Oktober 2006, 9.00 Uhr