Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
24.10.2007
Blatt 02

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Sei $n \in \mathbf{N}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}_n(\mathbf{R}) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ ein Unterraum der Dimenson $n(n+1)/2$ von $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Herm}_n(\mathbf{C}) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ ein reeller Unterraum der Dimension n^2 von $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $A \in \mathrm{Sym}_2(\mathbf{R})$ positiv definit ist, nicht aber $B \in \mathrm{Sym}_2(\mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (Satz des Pythagoras) Seien v, w, u paarweise verschiedene Vektoren in einem euklidischen Vektorraum mit zugehöriger Metrik d, weiter $a = d(w,u)$, $b = d(u,v)$, $c = d(v,w)$ und $\varphi = \angle(v-u, w-u) \in [0,\pi]$. Zeigen Sie den Satz des Pythagoras (und seine Umkehrung): $\varphi = \pi/2$, genau wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist.

4. (a) Sei $s\colon V \times V \to \mathbf{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum V. Man nennt dann $q\colon V \to \mathbf{R}$, $q(v) := s(v,v)$, *die zugehörige quadratische Form*. Zeigen Sie, dass man s aus q wie folgt zurück gewinnen kann (so genannte *Polarisierungsformel*):

$$s(v,w) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w)).$$

   (b) Können Sie das auch für Hermitesche Formen?

Abgabe: Mittwoch, 31. Oktober 2007, 9.00 Uhr