Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
31.10.2007
Blatt 03

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Sei $V = \mathbf{K}[T]^{(2)} = \{p \in \mathbf{K}[T] : \deg(p) \leq 2\}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbf{K}$ gegeben durch
$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 \bar{p}(x)q(x)\,dx.$$
Bestimmen Sie die beschreibende Matrix $A = M(\langle\cdot,\cdot\rangle; \mathcal{A})$ bzgl. der Basis $\mathcal{A} = (1, T, T^2)$ von V.

2. Sei $V = \mathbf{R}^2$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gegeben durch
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2.$$
   (a) Sei $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis von V und $\mathcal{B} = ((1,1), e_2)$. Bestimmen Sie die Matrizen $A = M(\langle\cdot,\cdot\rangle; \mathcal{K})$ und $B = M(\langle\cdot,\cdot\rangle; \mathcal{B})$.
   (b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{K}$ und prüfen Sie, ob tatsächlich $B = S^tAS$ ist.

3. Sei $V = \{f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ stetig} : f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\}$ und $U := \mathrm{span}(\sin, \cos) \subseteq V$. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbf{R}$,
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx.$$
Zeigen Sie: Setzt man $e_1 := \sqrt{2}\sin$, $e_2 = \sqrt{2}\cos$, so ist (e_1, e_2) eine ON-Basis von U.

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass
$$U^\perp := \{v \in V : \langle u, v\rangle = 0,\ \forall u \in U\}$$
ein Unterraum von V ist und es gilt: $V = U \oplus U^\perp$. ($U^\perp$ heißt *das orthogonale Komplement von U*.) Welche Dimension hat also $U^\perp$?

Abgabe: Mittwoch, 7. November 2007, 9.00 Uhr