Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
07.11.2007
Blatt 04

Übungen zu
„Mathematik III für Physiker“

1. Sei $V = \mathbf{R}[T]^{(2)} = \{p \in \mathbf{R}[T] : \deg(p) \leq 2\}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbf{R}$,
$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$
Orthonormalisieren Sie die Standardbasis $(1, T, T^2)$ von V nach E. Schmidt.

2. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ sei $\mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ die orthogonale Gruppe und $\mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ die unitäre Gruppe. Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(n)$ bzw. $\mathrm{U}(n)$ tatsächlich Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ sind.

3. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ setzt man
$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n) &:= \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}, \\ \mathrm{SU}(n) &:= \{A \in \mathrm{U}(n) : \det A = 1\} \end{aligned}$$
die spezielle orthogonale Gruppe bzw. *spezielle unitäre Gruppe* (zum Index n). Zeigen Sie:
   (a) Für jedes $A \in \mathrm{SO}(2)$ gibt es ein $\varphi \in \mathbf{R}$, so dass $A = S(\varphi)$ ist.
   (b) Für jedes $A \in \mathrm{SU}(2)$ gibt es ein $z \in \mathbf{C}^2$ mit $\|z\| = 1$, so dass $A = S(z)$ ist.

4. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie:
   (a) Ist $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbf{K})$ der Dualraum von V, so ist die Abbildung $\iota \colon V \to V^*$, $\iota(v)(w) = \langle v, w \rangle$, ein (Semi-)Isomorphismus.
   (b) Ist $f^* \colon V^* \to V^*$ die zu f duale Abbildung (d.i.: $f^*(\lambda) = \lambda \circ f$, vgl. Aufg. 4, Blatt 7, SS 2007) und ist $F \colon V \to V$ die zu f adjungierte Abbildung, so gilt: $F = \iota^{-1} \circ f^* \circ \iota$.

Abgabe: Mittwoch, 14. November 2007, 9.00 Uhr