Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
14.11.2007
Blatt 05

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Sei $S(\varphi) \in \mathrm{O}(2)$ die Drehmatrix für den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von $S(\varphi)$ nur dann zerfällt, wenn $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ ist.

2. Sei $(V, \langle \cdot, , \cdot \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Seien weiter $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Orthonormalbasen von V sowie $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ ihre Basiswechselmatrix. Zeigen Sie, dass S orthogonal bzw. unitär ist.

3. Sei $p \in \mathbf{R}[T_1, T_2]$ *ein homogenes, quadratisches Polynom in zwei Unbestimmten*, d.h.: es gibt ein $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Sym}_2(\mathbf{R})$ mit $p(T_1, T_2) = \sum_{i+j=2} a_{ij} T_1^i T_2^j$, und sei $c \in \mathbf{R}$. Man nennt dann $Q := \{x \in \mathbf{R}^2 : p(x) = c\}$ *eine Quadrik*. Zeigen Sie: Ist A positiv definit und $c > 0$, so gibt es einen orthogonalen Koordinatenwechsel $x = Sy$ $(S \in \mathrm{O}(2))$, so dass für Q in den neuen Koordinaten gilt:
$$Q = \{y \in \mathbf{R}^2 : \frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} = 1\}$$
(mit $a_1, a_2 > 0$; Q heißt dann *Ellipse*).

4. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ ein unitärer Vektorraum und $f \colon V \to V$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass V eine ON-Basis bestehend aus Eigenvektoren für f besitzt.

Abgabe: Mittwoch, 21. November 2007, 9.00 Uhr