Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
21.11.2007
Blatt 06

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. (a) Zeigen Sie, dass durch die Maximumsnorm auf $\mathbf{R}^n$ eine Norm gegeben ist.

   (b) Zeigen Sie, dass durch die Supremumsnorm auf dem Raum der beschränkten reellwertigen Funktionen auf einer Menge X eine Norm gegeben ist.

2. (a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die induzierte Norm $\|\cdot\|$ die so genannte *Parallelogrammregel* erfüllt: Für alle $x, y \in V$ gilt:

   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

   (b) Zeigen Sie, dass die Maximumsnorm auf $\mathbf{R}^n$ für $n \geq 2$ nicht von einem Skalarprodukt auf $\mathbf{R}^n$ induziert ist.

3. Bestimmen Sie für folgende Mengen $Y_i \subseteq \mathbf{R}^n$ $(i = 1, \ldots, 4)$ jeweils $\mathring{Y}$, ∂Y, $\bar{Y}$ (ohne Beweis):

   $$Y_1 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| < 1\},\ Y_2 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\},\ Y_3 = \mathbf{Q}^n,\ Y_4 = \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{Q}^n$$

4. Eine Teilmenge Y eines metrischen Raumes X heißt *dicht*, wenn $\bar{Y} = X$ ist. Zeigen Sie: Y ist genau dann dicht, wenn für jede nicht-leere offene Menge $U \subseteq X$ gilt, dass $U \cap Y \neq \emptyset$ ist.

Abgabe: Mittwoch, 28. November 2007, 9.00 Uhr